

# Chapitre V

## Instabilités Hydrodynamiques

### Table des matières

<b>V Instabilités Hydrodynamiques</b>	<b>V-1</b>
V.1 L'instabilité Frederiks : Système potentiel	V-1
V.1.1 La phase cristal liquide . . . . .	V-1
V.1.2 Conditions aux limites pour le directeur . . . . .	V-1
V.1.3 Energie élastique . . . . .	V-2
V.1.4 Energie magnétique . . . . .	V-2
V.1.5 L'instabilité Frederiks . . . . .	V-2
V.1.6 Paramètre d'ordre et champ critique . . . . .	V-3
V.1.7 Dynamique . . . . .	V-4
V.1.8 Cas d'une déformation inhomogène	V-4
V.1.9 Equation d'évolution inhomogène	V-5
V.2 L'instabilité de Rayleigh Bénard : Structures dissipatives . . . . .	V-5
V.2.1 Mécanisme de l'instabilité . . . . .	V-5
V.2.2 Equations BOUSSINESQ . . . . .	V-6
V.2.3 le problème linéaire . . . . .	V-7
V.3 Le modèle de Lorenz . . . . .	V-8
V.3.1 Les hypothèses du modèle . . . . .	V-8
V.3.2 Contribution dû à $\vec{v}\nabla\vec{v}$ . . . . .	V-8
V.3.3 Contribution dû à $\vec{v}\cdot\nabla\theta$ . . . . .	V-9
V.4 Equations d'amplitude . . . . .	V-11
V.4.1 Un modèle simplifié pour la convection . . . . .	V-11
V.4.2 Développement multi-échelles . . . . .	V-11
V.4.3 Amplitude en fonction de $q$ . . . . .	V-12
V.4.4 Instabilité d' ECKHAUS . . . . .	V-12
V.4.5 Diagramme de stabilité . . . . .	V-13
V.4.6 L'instabilité d'ECKHAUS est une instabilité de phase . . . . .	V-14
V.4.7 Autres instabilités . . . . .	V-14

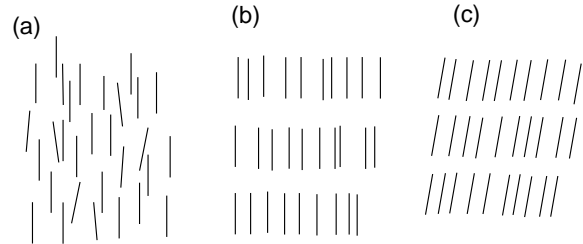


FIG. V.1: Configuration moléculaire des phases a) nématique, b) smectic-A et c) sectic-C

### V.1 L'instabilité Frederiks : Système potentiel

Nous allons décrire ici une instabilité des cristaux liquides, l'instabilité FREDERIKS, qui va nous permettre d'introduire les principaux concepts des instabilités hydrodynamiques. Cependant celle-ci présente une différence fondamentale avec les instabilités hydrodynamiques habituelles car il existe un potentiel, ici l'énergie, dont le minimum définit la solution stationnaire du système, elle est dite variationnelle. Les systèmes variationnels ne peuvent ainsi présenter que des solutions stationnaires et jamais de solution périodique et encore moins chaotique. Mais comme dans le cas des systèmes hamiltoniens intégrables, ils constituent un point de départ pour l'étude des systèmes dissipatifs.

Les instabilités sont toujours le résultats d'une compétition entre deux mécanismes antagonistes, pour l'instabilité FREDERIKS, cette compétition a lieu entre l'énergie élastique du cristal liquide et son énergie magnétique. Nous décrivons ici brièvement les origines de ces deux contributions, nous commençons par rappeler la nature de la phase nématique.

#### V.1.1 La phase cristal liquide

Les cristaux liquides sont des molécules qui présentent une (ou plusieurs phases) thermodynamique intermédiaire entre la phase liquide et la phase solide.

Ce sont souvent des molécules allongées que l'on peut assimiler à des batonnets. Dans la phase nématique, les molécules n'ont pas d'ordre positionnel (comme dans un liquide) mais présente par contre un ordre orientationnel. C'est-à-dire que les molécules sont (en moyenne) alignées dans une direction. Le cristal liquide dans sa phase nématique présente ainsi une importante anisotropie de ses propriétés : indice de réfraction, conductivité thermique, susceptibilité magnétique, etc... L'ordre des molécules est représenté par un vecteur unitaire qui pointe suivant l'axe des molécules, son sens n'ayant pas de signification physique. On trouve des cristaux liquides dans les afficheurs des montres digitales, l'instabilité que nous allons décrire est assez voisine du mécanisme utilisé dans ces afficheurs pour obtenir une variation de contraste.

### V.1.2 Conditions aux limites pour le directeur

Lorsque l'on refroidit un cristal liquide depuis la phase nématique vers la phase isotrope, la direction vers laquelle s'alignent les molécules, est *a priori* indéterminée. En pratique, elle est imposée par les parois du récipient le contenant ou par le champ magnétique ou électrique présent. Si ces parois n'ont subi aucun traitement, différentes orientations vont apparaître résultant en une structure complexe. Il est possible de préparer les surfaces du récipient afin d'aligner les molécules parallèlement aux parois, en recouvrant celles-ci de molécules organiques et en les frottant dans une direction donnée, on réalise ainsi un ancrage du directeur. Ce type d'ancrage est dit *planaire*. On peut aussi obtenir un ancrage des molécules perpendiculaire à la paroi en plaçant une couche de polymère sur la surface de verre, c'est l'ancrage homéotrope.

Dans les afficheurs, les molécules sont enfermées entre deux plaques de verres distantes de  $\approx 50\mu m$ , qui ont été traitées pour obtenir un ancrage planaire.

### V.1.3 Energie élastique

Les molécules de cristal liquide ont tendance à avoir la même orientation, si par exemple, nous prenons deux plaques de verre parallèles traitées pour aligner les molécules dans la même direction et plaçons entre elles une goutte de cristal liquide tenue par capillarité, l'énergie mécanique sera minimale lorsque toutes les molécules pointeront dans la direction d'alignement. Si maintenant, nous faisons tourner l'une des plaques par rapport à l'autre d'un angle  $\theta$ , nous imposons une contrainte aux molécules qui vont adopter une configuration où le directeur évolue continûment de puis 0 jusqu'à  $\theta$  sur l'épaisseur de la couche, comme nous l'avons représenté sur la figure V.2. Les molécules vont exercer un couple de rappel sur les plaques, dont

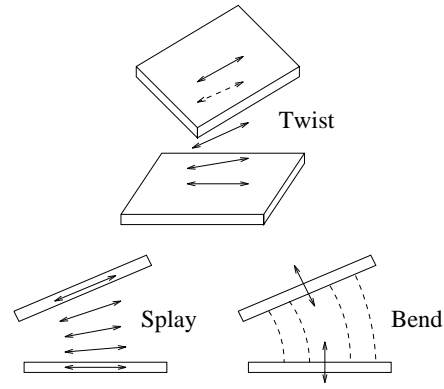


FIG. V.2: Déformation élastique de type twist dans une couche de cristal liquide

l'amplitude est petite mais finie, est qui correspond au fait que cette situation n'est pas un minimum d'énergie élastique. Dans un afficheur les deux plaques de verres sont tournées de  $90^\circ$  l'une par rapport à l'autre.

En fait, il existe trois déformations typiques que l'on peut imposées à un nématique : la déformation de type éventail (splay), celle de type torsion (twist) et la déformation de type courbure (bend). Nous avons reproduit la géométrie du champ des molécules correspondant sur la figure V.2.

A chacune de ces déformations est associée un coefficient d'élasticité :  $K_1$  correspond à l'éventail,  $K_2$  à la torsion et  $K_3$  à la courbure. L'énergie élastique par unité de volume d'une configuration quelconque du champ du directeur peut être mise sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} \left[ K_1 (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})^2 + K_2 (\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{n})^2 + K_3 (\vec{n} \times \text{rot} \vec{n})^2 \right] \quad (\text{V.1})$$

### V.1.4 Energie magnétique

L'anisotropie de la susceptibilité magnétique des molécules se mesure par la différence entre la susceptibilité longitudinale  $\chi_{\parallel}$  et celle transverse  $\chi_{\perp}$ . Si l'on applique un champ magnétique sur un cristal liquide, les molécules ont tendance à s'aligner avec le champ car  $\chi_{\parallel}$  est supérieur à  $\chi_{\perp}$ . Le champ magnétique exerce ainsi un couple sur les molécules  $\Gamma_m = \vec{M} \times \vec{H} = \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H}) \cdot (\vec{n} \times \vec{H})$  (où  $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ ). Le couple est nul quand  $\vec{n}$  est parallèle ou perpendiculaire à  $\vec{H}$ , mais si nous considérons l'énergie magnétique :

$$E_m = -\frac{1}{2} \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2 \quad (\text{V.2})$$

on constate que la situation où  $\vec{n}$  est perpendiculaire à  $\vec{H}$  est instable.

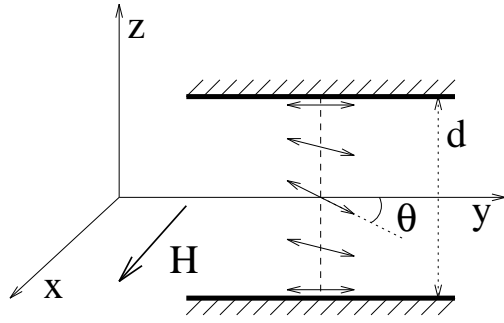


FIG. V.3: Disposition de la transition Frederiks

### V.1.5 L'instabilité Frederiks

Si on place une couche de nématique d'épaisseur  $d$  entre deux plaques de verre préparées de telle façon que  $\vec{n}$  soit ancré parallèlement aux plaques dans la direction  $Oy$ , les molécules vont toutes s'aligner suivant cette direction sur l'épaisseur de la couche comme nous l'avons représenté sur la figure V.3. Si maintenant nous ajoutons un champ magnétique suivant  $Ox$ , soit parallèle aux plaques mais perpendiculaire à la direction d'alignement, nous plaçons les molécules devant un choix : rester alignés suivant  $Oy$  et ne pas minimiser l'énergie magnétique, ou s'aligner avec le champ mais augmenter l'énergie élastique puisque les molécules au contact des plaques de verre doivent rester parallèles à  $Oy$ . Le nématique adopte alors une configuration où son directeur varie angulairement avec la position dans la couche. Supposons dans un premier temps que la direction du directeur est indépendante de  $x$  et de  $y$ , nous pouvons écrire celui-ci en fonction de l'angle  $\theta$  fonction de  $z$  uniquement. On en déduit aisément  $\nabla\vec{n}$ ,  $r\vec{ot}\vec{n}$  ainsi que  $r\vec{ot} \times \vec{n}$  :

$$\vec{\nabla}\vec{n} = \vec{0} \quad (V.3)$$

$$r\vec{ot}.\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta.\theta_z \\ \cos\theta.\theta_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (V.4)$$

$$\vec{n} \times r\vec{ot}\vec{n} = \vec{0} \quad (V.5)$$

Avec  $\theta_z = \partial\theta/\partial z$ , on obtient ainsi l'expression de l'énergie suivante :

$$dF = \frac{1}{2}K_2 \left[ \theta_z^2 - \frac{\sin^2\theta}{\xi^2} \right] \quad (V.6)$$

avec  $\xi = \sqrt{K_2/\chi_a H^2}$ .  $\xi$  est homogène à une longueur qui correspond à la longueur d'influence. Si nous appliquons un champ magnétique très fort, les molécules au milieu de la couche, vont s'aligner suivant  $Ox$ , mais lorsque nous approchons près des parois, les molécules

restent alignés suivant  $Oy$ . La longueur  $\xi$  mesure la distance caractéristique sur laquelle l'orientation des molécules reste dominée par l'ancrage des parois. Plus le champ magnétique est intense, plus cette longueur  $\xi$  est faible. Quand  $\xi \approx d$ , les domaines d'influence des deux parois se recouvrent et l'orientation des molécules ne suivra pas l'influence du champ. Nous sentons ainsi qu'il existe deux régimes, un à champ faible où le directeur est homogène  $\theta(x, y, z) = 0$ , et un régime à champ plus intense où le directeur va présenter une distorsion. Pour estimer la valeur précise du champ où se produit la bifurcation, nous devons modéliser la forme de cette distorsion du directeur. Pour respecter les conditions aux limites, nous choisissons :

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \quad (V.7)$$

Il est facile de vérifier que le mode qui conduit au seuil le plus bas correspond à  $n = 1$ , on obtient ainsi l'expression suivante :

$$dF = \frac{1}{2}K_2 \left[ \theta_0^2 \frac{\pi^2}{d^2} \sin^2 \frac{\pi z}{d} - \frac{1}{\xi^2} \left( \theta_0^2 \cos^2 \frac{\pi z}{d} - \frac{\theta_0^4}{3} \cos^4 \frac{\pi z}{d} \right) \right] \quad (V.8)$$

En intégrant suivant  $z$ , nous obtenons :

$$F = F_0 + \frac{K_2 d}{4} \left( \frac{\pi^2}{d^2} - \frac{1}{\xi^2} \right) \theta_0^2 + \frac{K_2 d}{24} \frac{1}{\xi^2} \theta_0^4 \dots \quad (V.9)$$

Soit :

$$F = F_0 + a\theta_0^2 + c\theta_0^4 \quad (V.10)$$

Nous retrouvons une expression de l'énergie écrite par LANDAU pour décrire une transition du second ordre. Comme  $a$  peut changer de signe lorsque l'on augmente  $H$ , nous pouvons avoir les trois types de situations décrites sur la figure V.4.

### V.1.6 Paramètre d'ordre et champ critique

Le système cherchant toujours à minimiser son énergie libre, nous remarquons que deux comportements sont possibles suivant que  $a > 0$  ou  $a < 0$ . Dans le premier cas,  $F$  ne possède qu'un minimum correspondant à  $\theta_0 = 0$  le directeur ne présente alors pas de distorsion. Pour  $a < 0$ , l'énergie libre a deux minimums non nuls et symétriques. Le champ magnétique qui conduit à  $a = 0$  est appelé le champ critique  $H_c$ , c'est le point de bifurcation du système, il correspond à  $\xi = \xi_c = d/\pi$  soit :

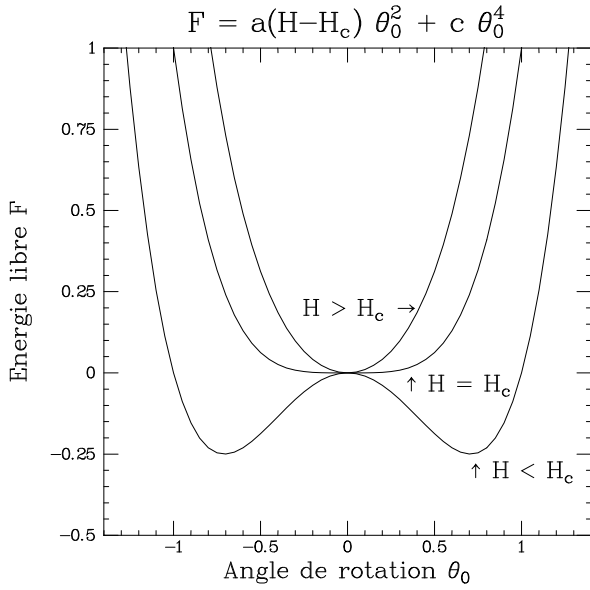


FIG. V.4: Evolution de l'énergie libre de la couche de nématique pour trois type de champ a)  $H < H_c$  b)  $H = H_c$  et  $H > H_c$ .

$$H_c = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_2}{\chi_a}}$$

Au delà du champ critique, le directeur présente une déformation spontanée avec un angle  $\pm\theta_0$  tel que :

$$\theta_0 = \pm\sqrt{12}\epsilon^{1/2} \text{ avec } \epsilon = \frac{H - H_c}{H_c}$$

### V.1.7 Dynamique

Les cristaux liquides coulent comme des liquides visqueux. Le vecteur directeur ne tourne pas instantanément sous l'effet du champ magnétique, il est freiné par des effets de viscosité. En fait la viscosité des cristaux liquides est aussi anisotrope et il faut 5 coefficients pour rendre compte des différentes situations. Pour ne pas compliquer les calculs nous supposons qu'il n'y a qu'une seule viscosité. Lorsque la couche de nématique est mise hors d'équilibre, elle revient vers le minimum de l'énergie libre avec une dynamique variationnelle qui s'écrit :

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta = -\frac{dF}{d\theta} \delta \theta \quad (\text{V.11})$$

où  $\gamma$  est le coefficient de viscosité. L'équation d'évolution de  $\theta_0$  correspond ainsi à celle que nous avons utilisée pour décrire une bifurcation fourche :

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = -2a\theta - 4c\theta^3 \quad (\text{V.12})$$

Sauf pour  $H = H_c$ , la dynamique est de type exponentielle :

$$\begin{aligned} H < H_c \quad \theta = \theta_i e^{\frac{2a}{\gamma} t} &= \theta_i e^{-\frac{\pi^2 K_3}{\gamma d} (-\epsilon) t} \\ H > H_c \quad \theta = \theta_i e^{-\frac{4a}{\gamma} t} &= \theta_i e^{-\frac{2\pi^2 K_3}{\gamma d} \epsilon t} \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

### V.1.8 Cas d'une déformation inhomogène

Si nous augmentons brutalement le champ magnétique depuis 0 jusqu'à une valeur  $H > H_c$ , le directeur va basculer vers l'une des valeurs  $\pm\theta_0$ . Si l'échantillon est assez grand, il se peut que des régions distantes choisissent chacune des deux valeurs possibles. Il apparaît ainsi des domaines dans l'échantillon, ces domaines sont séparés par des parois où le directeur passe continûment de  $+\theta_0$  et  $-\theta_0$ . Nous nous proposons ici de déterminer l'équation du profil de la paroi. Pour cela, il nous faut reprendre le calcul de l'énergie élastique en supposant maintenant que  $\theta$  est une fonction de  $x$ ,  $y$  et de  $z$ . Nous obtenons les expressions suivantes pour la divergence de  $\vec{n}$  et son rotationnel.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \cos \theta \cdot \theta_x \quad (\text{V.14})$$

$$rot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \theta_z \\ \cos \theta \cdot \theta_z \\ -\sin \theta \cdot \theta_x \end{pmatrix} \quad (\text{V.15})$$

$$\vec{n} \times rot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta \cdot \theta_x \\ \sin^2 \theta \cdot \theta_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.16})$$

Où  $\theta_x = \partial\theta/\partial x$ ,  $\theta_y = 0$  et  $\theta_z = \partial\theta/\partial z$ . Nous obtenons ainsi l'énergie :

$$dF = \frac{K_1}{2} \theta_x^2 \cos^2 \theta + \frac{K_2}{2} (\theta_z^2 + \sin^2 \theta \theta_x^2) - \frac{K_3}{2} \sin^2 \theta \theta_x^2$$

Nous considérons ici, le cas où la paroi est perpendiculaire au champ  $H$ , nous avons  $\theta_y = 0$  :

$$dF = \frac{K_2}{2} \left[ \theta_z^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\xi^2} + \theta_x^2 \left( 1 + \frac{K_3}{K_2} \right) \sin^2 \theta + \frac{K_1}{K_2} \cos^2 \theta \right] \quad (\text{V.17})$$

Nous retrouvons là une expression voisine du cas isotrope de V.9 avec juste un terme supplémentaire en  $\theta_x^2$ . En prenant un profil en  $z$  comme précédemment V.7, en intégrant sur les variables d'espace, et en ne gardant que les premiers termes du développement nous obtenons une expression de l'énergie totale :

$$F = F_0 + \frac{K_2 d}{4} \left[ \frac{\xi^2 - \xi_c^2}{\xi^2 \xi_c^2} \theta_0^2 + \frac{K_1}{K_2} \theta_x^2 + \frac{1}{24 \xi^2} \theta_0^4 \right] \quad (\text{V.18})$$

Nous devons maintenant chercher une fonction  $\theta(x)$  qui minimise l'énergie totale  $F$ . Ce problème est analogue à la recherche de la trajectoire minimisant le Lagrangien en mécanique. En effet, si nous transposons la variable d'espace  $x$  en une variable temporelle  $t'$ , nous remarquons que  $F$  contient des termes d'énergie potentiel  $\theta^2$  et  $\theta^4$  et un terme d'énergie cinétique  $\theta_x^2$ . Nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \theta} = 2a\theta + 4c\theta^3 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_x} = 2b\theta_x \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \theta_x} = 2b\theta_{xx} \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

Le formalisme Lagrangien nous permet d'écrire :  $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta_x} \right)$ , ce qui nous conduit à :

$$a\theta + b\theta_{xx} - 2c\theta^3 = 0 \quad (\text{V.20})$$

C'est cette équation qui nous permet de déterminer le profil de la paroi à l'équilibre. En effet en multipliant chacun des termes de V.20 par  $\theta_x$  et en intégrant nous obtenons l'équation :

$$\text{Cte.} = a\theta^2 + b\theta_x^2 - c\theta^4$$

Nous devons maintenant chercher une fonction  $\theta(x)$  telle qui joigne une solution  $+\theta_0$  à  $x \rightarrow +\infty$  et  $-\theta_0$  à  $x \rightarrow -\infty$  avec  $\theta_0^2 = -a/(2c)$ . Loin de la paroi, nous pouvons supposer que le directeur est homogène avec  $x$  et que le terme en  $\theta_x^2$  est négligeable. Ceci nous permet de calculer Cte. =  $-c\theta_0^4$ , l'équation différentielle qui régit le profil de la paroi prend la forme :  $b\theta_x^2 = -c(\theta^4 - 2\theta^2\theta_0^2 + \theta_0^4)$ . Si nous supposons que  $K \ll 1$ , nous obtenons :

$$\frac{d\theta}{\theta_0^2 - \theta} = \frac{dx}{2\sqrt{K_1/K_2}\xi}$$

ce qui conduit à un profil de la forme :

$$\boxed{\theta(x) = \theta_0 \text{th} \left( \frac{x}{\xi_{\parallel} \epsilon^{-1/2}} \right)} \quad \text{avec } \xi_{\parallel} = \frac{\sqrt{K_1}}{K_2} \xi \quad (\text{V.21})$$

Le profil de la paroi est donc une tangente hyperbolique dont la longueur caractéristique est  $\xi_{\parallel} \epsilon^{-1/2}$ . Cette longueur est en fait la largeur de la paroi, elle diverge lorsque nous approchons du champ critique, comme le fait la longueur de corrélation dans une transition de phase du second ordre.

## V.1.9 Equation d'évolution inhomogène

Il est intéressant d'écrire l'équation d'évolution temporelle de la fonction  $\theta(x, z)$  comme nous l'avions fait en V.12. Il nous faut calculer la contribution du terme en  $\theta_x^2$  :  $\frac{\partial}{\partial t} \theta_x^2 = 2\theta_x \theta_{xx} \partial x / \partial \theta$  soit  $2\theta_{xx}$ . L'équation d'évolution prend donc la forme :

$$\gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mu \theta + \xi_{\parallel} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - g\theta^3 \quad (\text{V.22})$$

C'est l'équation de LANDAU-GINSBURG que l'on trouve pour un très grand nombre d'instabilité. Dans le cas sans paroi, nous avons montré son analogie avec une transition de phase du second ordre. Nous avons mis en évidence que le paramètre d'ordre, ici  $\theta$ , varie comme  $\sqrt{\mu}$ , qu'il y a un ralentissement critique avec un temps caractéristique qui varie comme  $\mu^{-1}$ . Qu'il apparait une longueur de corrélation  $\xi_0$  qui varie comme  $\mu^{-1/2}$ .

## V.2 L'instabilité de Rayleigh Bénard : Structures dissipatives

Nous abordons ici une instabilité hydrodynamique qui n'est plus de type variationnelle, et peut conduire à un comportement dynamique beaucoup plus riche puisqu'elle développe des solutions chaotiques dès que le paramètre de contrôle est suffisamment grand.

### V.2.1 Mécanisme de l'instabilité

Nous considérons une couche de fluide placée horizontalement dans le champ de pesanteur. La couche est supposée d'extension infinie dans ce plan et son épaisseur est notée  $d$ . Le fluide peut être un gaz ou un liquide, il est caractérisé par sa viscosité  $\nu = \eta/\rho$  et sa diffusivité thermique  $\kappa = \lambda/\rho C_p$ . Nous verrons que seul le rapport  $\sigma = \nu/\kappa$ , appelé le nombre de PRANDTL, suffit à caractériser le fluide utilisé. Pour les liquides ordinaires eau, alcool...  $\sigma \approx 7$ , pour les liquides visqueux, huiles, miel ...  $\sigma$  est grand, il atteint  $10^{10}$  pour le manteau terrestre; les gaz ont des coefficients de diffusion à peu près tous identiques donnant  $\sigma = 0,7$ , le mercure qui conduit bien la chaleur, quant à lui a  $\sigma = 0,025$ . L'intérieur du soleil possède un nombre de PRANDTL très petit.

La couche de fluide est placée entre deux plaques solides dont la température est homogène est fixée à  $T_0$  pour la plaque du haut et  $T_0 + \Delta T$  pour celle du bas. Par ailleurs les conditions aux limites sont, pour une expérience,  $\vec{V} = 0$  au contact de chacune des plaques habituellement et  $\partial V_z / \partial z = 0$  mais nous choisirons ici la condition irréalisable expérimentale  $\partial^2 V_z / \partial z^2 = 0$ ,

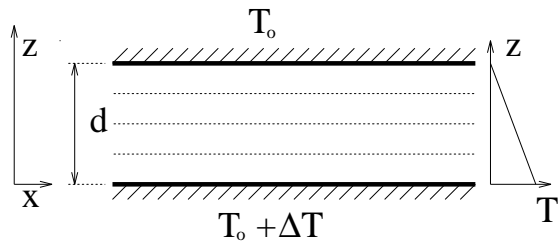


FIG. V.5: Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

qui permet des calculs plus facile et correspond à une contrainte nulle aux parois. Nous supposons, par ailleurs, que la température est uniforme à l'interface paroi-fluide, et égale à celle du solide

Comme le fluide est chauffé par le bas, les couches les plus basses sont moins denses que celles situées au dessus (dans la mesure où le coefficient de dilatation du fluide  $\alpha$  est positif) et on imagine facilement que cette situation va conduire à une instabilité. Nous venons de décrire les mécanismes déstabilisants de la convection, mais il existe aussi des facteurs stabilisants qui vont s'opposer à l'apparition de mouvements au sein du fluide. La viscosité du fluide est évidemment l'un d'entre eux, mais nous allons voir que la diffusivité de la chaleur en est un autre. Nous proposons de faire un bilan estimatif des mécanismes mis en jeu pour montrer qu'il existe un seuil fini à l'instabilité.

Supposons que le fluide soit au repos mais qu'un gradient de température soit présent, imaginons que nous puissions faire tourner d'un petit angle un cylindre horizontal de fluide de diamètre  $d$ , il est soumis à la force d'ARCHIMÈDE qui conduit à l'apparition d'un couple qui va mettre en mouvement le cylindre. Comme celui-ci possède une certaine inertie, nous pouvons lui associer un temps caractéristique  $\tau_A$  qui n'est autre que le couple divisé par la masse, soit :

$$\tau_A = \left( \frac{g\Delta\rho}{\rho d} \right)^{-1/2}$$

Les effets stabilisants peuvent être aussi quantifiés par un temps caractéristique, ainsi si nous imaginons qu'il n'y a plus de gradient de température et si nous lançons le cylindre de fluide avec une vitesse de rotation non nulle, la viscosité va faire décroître cette vitesse avec un temps caractéristique  $\tau_v$ . Le fait que la chaleur puisse diffuser dans le fluide est aussi un effet stabilisant, le cylindre de fluide tourné d'un certain angle est instable car il est le siège d'un gradient de température (donc de densité), la diffusion de la chaleur va effacer ce gradient thermique avec un temps caractéristique  $\tau_T$ . Les expressions de chacun de ces temps caractéristiques

sont données par :

$$\tau_v = \frac{d^2}{\nu}$$

$$\tau_T = \frac{d^2}{\kappa}$$

Le rapport  $\tau_v \cdot \tau_T / \tau_A^2$  compare donc les effets stabilisants et déstabilisants. Ce nombre sans dimension s'appelle le nombre de RAYLEIGH, en exprimant que  $\delta\rho/\rho = \alpha\Delta T$ , il s'écrit :

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa} \quad (\text{V.23})$$

Un grand nombre de Rayleigh signifie que les temps caractéristiques d'amortissement  $\tau_T$  et  $\tau_v$  sont grand devant celui de la poussée d'Archimède, les effets stabilisants agissent moins vite que les facteurs déstabilisants et donc la convection peut s'établir. Dans l'autre cas, les effets stabilisants tuent la perturbation avant qu'elle ait pu se développer et l'état convectif reste stable. Le nombre de Rayleigh est proportionnel à la différence de température appliquée à la couche de fluide, c'est une mesure adimensionnée de la contrainte qui lui est appliquée.

## V.2.2 Equations BOUSSINESQ

Pour obtenir les équations qui permettent de décrire les mouvements de convection, nous devons partir des équations qui régissent un fluide. Nous allons montrer comment on peut les réduire pour obtenir une expression plus simple appelée les équations BOUSSINESQ. Comme nous allons introduire des coordonnées réduites, nous utiliserons  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  comme coordonnées du laboratoire. Les équations que nous allons utiliser sont :

- l'équation de continuité s'écrit  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_1) = 0$  qui dans la limite des fluides incompressibles conduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = 0 \quad (\text{V.24})$$

- l'équation de Navier-Stokes, qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{V}_1 = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P_1 + \nu \Delta \vec{V}_1 \quad (\text{V.25})$$

- l'équation de la chaleur qui décrit la conservation de l'entropie dans laquelle  $\phi$  correspond à la production de chaleur par frottement visqueux :

$$\rho C_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} T_1 = \lambda \Delta T_1 + \phi \quad (\text{V.26})$$

– **l'équation d'état du fluide** qui décrit l'évolution de la température :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T_1 - T_0)] \quad (\text{V.27})$$

L'approximation BOUSSINESQ consiste à :

- Supposer le fluide incompressible :  $\partial\rho/\partial t = 0$
- Négliger l'échauffement par effets visqueux :  $\phi = 0$
- Supposer que toutes les propriétés du fluide  $\nu$ ,  $\kappa$  sont indépendantes de la température sauf la densité qui est le moteur de l'instabilité.

En absence de convection, le champ de vitesse est nul, par contre il existe un gradient de température ainsi qu'un gradient de pression qui se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{0} \\ T_1^0 = T_0 + \Delta T(d - z_1)/d \\ P_1^0 = P_0 + \rho_0 g(d - z_1) - \alpha g \rho_0 (\Delta T/2d)(d - z_1)^2 \end{cases} \quad (\text{V.28})$$

Quand la convection apparaît, il faut ajouter une contribution convective à ces champs conductifs. Le champ de vitesse  $\vec{v}_1$  cesse d'être nul, les modulations de température  $\theta_1$  et de pression  $\Pi_1$ , s'ajoutent respectivement à chacune des équations de V.28. Etablissons maintenant les équations qui régissent ces variables :

En séparant les deux contributions du gradient de température, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}\theta_1 = \frac{\Delta T}{d} \vec{v}_1 \cdot \vec{k} + \kappa \Delta\theta_1 \quad (\text{V.29})$$

Où  $\vec{k}$  est un vecteur unitaire suivant l'axe  $Oz$ . Pour l'équation de NAVIER-STOKES nous devons expliciter la force  $\vec{F}$  agissant sur un élément de fluide, en fonction de la poussée d'ARCHIMÈDE :  $\vec{F} = -g(\rho/\rho_0) \cdot \vec{k}$  où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. En développant l'expression de la densité  $\vec{F} = -g(1 - \alpha(\Delta T/d)(d - z_1) - \alpha\theta_1) \cdot \vec{k}$  et en calculant l'expression de la pression liée à la stratification de densité  $\vec{\nabla}P/\rho = g(\alpha\Delta T(d - z_1)/d - 1) \cdot \vec{k} + \vec{\nabla}\Pi_1/\rho_0$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t_1} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}\vec{v}_1 = g\alpha\theta_1 \vec{k} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla}\Pi_1 + \nu\Delta\vec{v}_1 \quad (\text{V.30})$$

Nous pouvons maintenant adimensionner ces équations en opérant les changement de variables suivants :

- **espace** :  $x = x_1/d, y = y_1/d, z = z_1/d$
- **temporelle** :  $t = t_1 \cdot \kappa/d^2$
- **température** :  $\theta = \theta_1 \cdot R_a/\Delta T$

– **pression** :  $\Pi = \Pi_1 \cdot d^2/(\rho\kappa\nu)$

Où le  $R_a$  n'est autre que le nombre de Rayleigh. Les équations adimensionnées prennent ainsi la forme :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\theta + \partial\theta/\partial t = R_a \vec{v} \cdot \vec{k} + \Delta\theta \\ \sigma^{-1} [\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} + \partial\vec{v}/\partial t] = \theta \cdot \vec{k} - \vec{\nabla}\Pi + \Delta\vec{v} \end{cases} \quad (\text{V.31})$$

Ces équations constituent le système modèle qui permet de décrire la convection, elles ont deux termes non-linéaires :  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\theta$  de nature différente dont l'influence respective est déterminée par le nombre de PRANDTL  $\sigma$ .

### V.2.3 le problème linéaire

Nous allons ici aborder l'étape qui permet de déterminer le seuil de l'instabilité ainsi que l'allure du mode instable. Cette étape est équivalente à ce que nous avons fait pour obtenir V.7 mais elle est rendue plus complexe par le fait qu'il existe ici trois champs en présence : la température  $\theta$ , la vitesse  $\vec{v}$  et la pression  $\Pi$ . Il nous faut en effet déterminer ces trois champs pour qu'ils soient solutions des équations BOUSSINESQ linéarisées :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\vec{v} = \vec{0} \\ (\partial\theta/\partial t) = R_a \vec{v} \cdot \vec{k} + \Delta\theta \\ \sigma^{-1} (\partial\vec{v}/\partial t) = \theta \cdot \vec{k} - \vec{\nabla}\Pi + \Delta\vec{v} \end{cases} \quad (\text{V.32})$$

En prenant le rotationnel de la dernière équation de V.32, nous pouvons éliminer le champ de pression  $\Pi$  (le rotationnel d'un gradient est nul). Nous obtenons alors une équation d'évolution pour  $\text{rot}\vec{v} = \vec{\Omega}$  qui est la vorticité. Il est alors plus aisé de reprendre une deuxième fois le rotationnel en notant que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

en utilisant le fait que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ , l'équation de la vitesse devient :

$$-\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \vec{v}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \theta \cdot \vec{k}) - \nabla^2 (\nabla^2 \vec{v})$$

où nous avons :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\theta \cdot \vec{k}) = \begin{pmatrix} \theta_{xz} \\ \theta_{yz} \\ -\theta_{xx} - \theta_{yy} \end{pmatrix}$$

Où nous écrivons la composante suivant  $z$  :  $-\Delta_h \theta$  qui représente le laplacien horizontal. Nous allons rechercher des solutions sous forme de rouleaux ayant leur

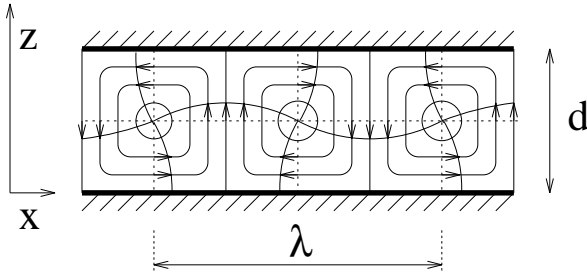


FIG. V.6: Description des champs de vitesse de rouleaux convectifs dans le cas de conditions aux limites libre-libre.

axe suivant  $y$ , ce qui nous permet de dire que toutes les dérivées partielles suivant  $y$  sont nulles, et d'écrire la vitesse sous la forme :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

Nous devons donc trouver les solutions du système :

$$\begin{cases} \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \nabla^4 u - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} \\ \sigma^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = \nabla^4 w + \Delta_h \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = R_a w + \nabla^2 \theta \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{V.33})$$

Guidés par les expériences, nous allons chercher une solution sous forme de rouleaux que nous modéliserons par des fonctions trigonométriques. Nous utilisons ici les conditions aux limites irréalistes dites **libre-libre** vérifiant :

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1$$

Nous utilisons les expressions ci-dessous dont nous donnons une représentation sur la figure V.6 :

$$\begin{cases} w = w_0 \sin(n\pi z) \cos(kx) e^{\beta t} \\ u = u_0 \cos(n\pi z) \sin(kx) e^{\beta t} \\ \theta = \theta_0 \sin(n\pi z) \cos(kx) e^{\beta t} \end{cases} \quad (\text{V.34})$$

$\beta$  est donc la valeur propre d'un opérateur linéaire  $\mathcal{L}$ . On peut montrer que cet opérateur qui agit sur le triplet  $(u, w, \theta)$  est, lorsque l'on définit un produit scalaire correspondant à notre situation (généralement :  $\langle f, g \rangle = \int_{z=0}^{z=1} f(z)g(z)dz$ ), hermitique (autoadjoint) :

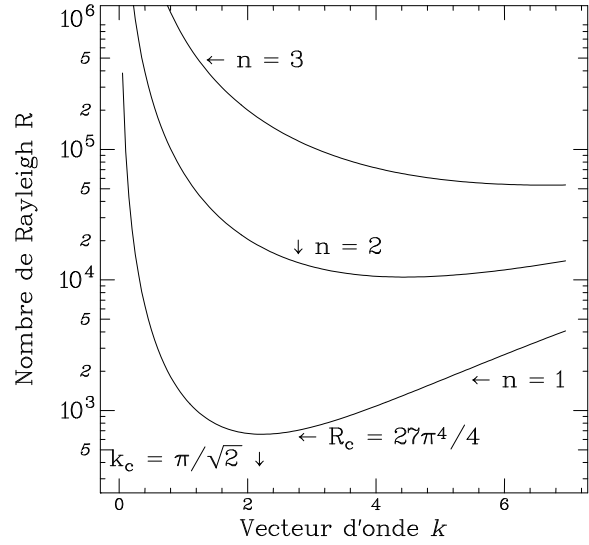


FIG. V.7: Courbe de stabilité marginale pour les modes  $n = 1, n = 2$  et  $n = 3$ , dans le cas des conditions aux limites libre-libre.

ses valeurs propres sont réelles, le signe de  $\beta$  donne la stabilité vers un état stationnaire. (Nous n'avons pas de bifurcation de HOPF).

En injectant V.34 dans V.33, nous obtenons un système de quatre équations avec trois inconnues  $(u_0, w_0, \theta_0)$  qui dépendent d'un paramètre  $\beta$  :

$$\begin{cases} -\sigma^{-1} \beta (n^2 \pi^2 + k^2) u_0 = (n^2 \pi^2 + k^2)^2 u_0 + n \pi k \theta_0 \\ -\sigma^{-1} \beta (n^2 \pi^2 + k^2) w_0 = (n^2 \pi^2 + k^2)^2 w_0 - k^2 \theta_0 \\ \beta \theta_0 = R_a w_0 - (n^2 \pi^2 + k^2) \theta_0 \\ 0 = k u_0 + n \pi w_0 \end{cases} \quad (\text{V.35})$$

En combinant la quatrième équation et la première, nous retrouvons la seconde, ceci signifie que nous pouvons considérer uniquement le système contenant la seconde et la troisième qui nous donne :

$$\begin{cases} (\beta/\sigma + (n^2 \pi^2 + k^2))(n^2 \pi^2 + k^2) w_0 - k^2 \theta_0 = 0 \\ R_a w_0 - (\beta + (n^2 \pi^2 + k^2)) \theta_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{V.36})$$

Pour que ce système possède des solutions, il faut que son déterminant soit nul. Ceci va nous donner une relation entre  $\beta$  et  $R_a$ . En fixant  $\beta = 0$ , nous définissons la condition pour laquelle le taux de croissance d'une solution est nulle c'est-à-dire que le mode est marginal :

$$R_a = \frac{(n^2 \pi^2 + k^2)^3}{k^2} \quad (\text{V.37})$$



### V.3 Le modèle de Lorenz

L'analyse du modèle linéaire nous a permis de déterminer l'existence et la forme de l'écoulement qui va apparaître quand la différence de température  $\Delta T$  devient suffisamment grand, mais il ne nous dit rien sur son amplitude. Le modèle de LORENZ est un système minimal où les non-linéarités ne sont plus négligées, il permet ainsi de déterminer l'amplitude des mouvements convectifs. Par ailleurs le modèle de LORENZ a joué un rôle historique car son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique et il constitua le premier système dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange.

#### V.3.1 Les hypothèses du modèle

Le modèle de LORENZ s'intéresse au premier mode linéairement instable ayant le vecteur d'onde  $k = k_c$  c'est-à-dire à  $n = 1$ , de plus il suppose que le système de rouleaux est parallèle à  $Oy$  ce qui implique que toutes les dérivées suivant  $y$  sont nulles. L'idée est de considérer que le système de rouleaux possède une amplitude constante suivant  $Ox$  mais pouvant évoluer dans le temps ce qui nous permet de nous intéresser qu'aux fonctions  $w_0(t)$ ,  $u_0(t)$  et  $\theta_0(t)$ .

Toutefois ce modèle prend en compte les termes non-linéaires de l'équation BOUSSINESQ, nous devons considérer les termes  $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$  et  $\vec{v}\vec{\nabla}\theta$ . En particulier nous devons calculer leur action sur le système de rouleaux droits défini par V.34.

#### V.3.2 Contribution dû à $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$

Pour faire disparaître le terme de pression nous avons pris le double rotationnel de l'équation de vitesse; il faut reprendre ce calcul sur le terme non-linéaire :

$$(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{v})$$

en prenant le rotationnel de cette expression le terme en gradient disparaît, il vient :

$$\vec{\nabla} \times [(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{v}] = \vec{\nabla} \times [(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}] = \vec{\nabla} \times [\vec{\Omega} \times \vec{v}]$$

où  $\vec{\Omega}$  est la vorticité. Comme  $\partial/\partial y = 0$  elle s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z u - \partial_x w \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en appliquant le double rotationnel nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v})] = \begin{pmatrix} -[(\Omega u)_{xz} + (\Omega w)_{z^2}] \\ 0 \\ [(\Omega w)_{xz} + (\Omega u)_{x^2}] \end{pmatrix} \quad (V.38)$$

en utilisant la forme des rouleaux défini par V.34 nous obtenons :  $\Omega = (w_0 k - \pi u_0) \sin \pi z \sin kx$ . La composante suivant  $x$  de V.38 devient :

$$(\Omega u)_{xz} + (\Omega w)_{z^2} = \Omega_0 \pi (w_0 \pi + k u_0) \cos 2\pi z \sin 2kx$$

ce terme est nul car  $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$  implique que  $w_0 \pi + k u_0 = 0$ . On vérifie aisément que la contribution en  $z$  de V.38 est également nulle.

Dans le modèle de LORENZ nous venons de montrer que la non-linéarité  $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$  ne joue aucun rôle. Il faut se rendre compte que le modèle de LORENZ est très particulier et il ne faudrait pas conclure que  $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$  n'intervient pas dans la convection, bien au contraire dès que les rouleaux présentent de la courbure ou une forme un peu plus complexe que celle de V.34, le terme  $\vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}$  joue un rôle déterminant.

Les équations régissant les composantes du vecteur vitesse sont les même dans le modèle de LORENZ que dans le cas linéaire, soit :

$$\begin{cases} -\sigma^{-1}(\pi^2 + k^2) \frac{\partial u_0}{\partial t} = (\pi^2 + k^2) u_0 + \pi k \theta_0 \\ -\sigma^{-1}(\pi^2 + k^2) \frac{\partial w_0}{\partial t} = (\pi^2 + k^2) w_0 - k^2 \theta_0 \end{cases} \quad (V.39)$$

Ces deux équations sont équivalentes puisque  $w_0 \pi + k u_0 = 0$ , il nous suffit d'en conserver une seule, celle de  $w_0$  par exemple.

#### V.3.3 Contribution d  à $\vec{v}.\vec{\nabla}\theta$

Le terme  $\vec{v}.\vec{\nabla}\theta$  vaut  $u\partial_x\theta + w\partial_z\theta$  en utilisant la forme des rouleaux définie par V.34 nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{v}.\vec{\nabla}\theta &= -k\theta_0 u_0 \sin^2(kx) \cos \pi z \sin \pi z \\ &+ w_0 \pi w_0 \cos^2(kx) \cos \pi z \sin \pi z \end{aligned}$$

soit

$$\vec{v}.\vec{\nabla}\theta = \frac{\pi \theta_0 \omega_0}{2} \sin(2\pi z)$$

Ce terme non-linéaire fait apparaître un harmonique 2 en  $z$  sans dépendance en  $x$ , c'est- dire un harmonique 0 en  $x$ . Cette composante supplémentaire va jouer un rôle essentiel, nous devons donc modifier la

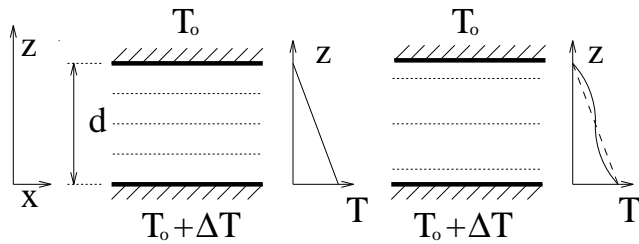


FIG. V.8: Effet de l'harmonique 2 sur le gradient vertical de température.

forme de la solution choisie en V.34 et modifier la forme de la modulation de température par :

$$\theta = \theta_0 \sin(\pi z) \cos(kx) + \theta_2 \sin(2\pi z) \quad (\text{V.40})$$

Il faut remarquer que la forme de cet harmonique est ici très simple et correspond, comme on peut le voir sur la figure V.8, à une modification du gradient linéaire de température imposé à la couche de fluide qui est le moteur de l'instabilité. L'harmonique 2 diminue le gradient au centre de la couche et le renforce près des parois horizontales. Cette situation traduit le fait que les mouvements de convection transportent la chaleur efficacement au centre de la couche tandis qu'il sont freinés près des parois. Le flux de chaleur est constant sur l'épaisseur, il se décompose en deux contributions : le flux conductif (proportionnel au gradient vertical de température) et le flux convectif. Lorsque le flux convectif est important (au centre de la couche), le flux conductif est plus faible, par contre près des parois le flux convectif est faible et le flux conductif est plus fort.

Nous devons maintenant déterminer l'équation régissant cet harmonique. A partir de l'équation de la perturbation dans l'équation BOUSSINESQ V.31 nous isolons les contributions liées au mode fondamental en  $\sin(\pi z) \cos(kx)$  de celles en  $\sin(2\pi z)$ . Pour cette dernière nous obtenons :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \frac{\pi}{2} \theta_0 w_0 = -4\pi^2 \theta_2$$

Afin d'évaluer la composante en  $\sin(\pi z) \cos(kx)$ , nous devons déterminer la composante de ce type obtenue par les termes non-linéaires en  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \theta$  où la composante de vitesse correspond au mode linéaire tandis que celui de température correspond à l'harmonique 2, soit :

$$w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 2\pi \theta_2 w_0 \sin(\pi z) \cos(kx) \cos(2\pi z)$$

L'équation de la composante en  $\sin(\pi z) \cos(kx)$  est donc :

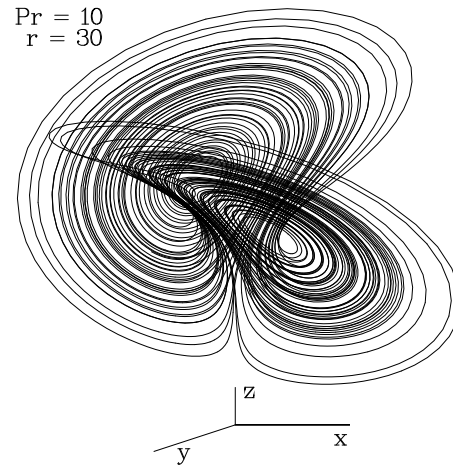


FIG. V.9: Vue en perspective de l'attracteur de LORENZ

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} - \pi \theta_2 w_0 = R_a w_0 - (\pi^2 + k^2) \theta_0$$

Evidemment des harmoniques supérieures sont apparus mais ils ne se couplent au fondamental qu'à des ordres plus élevé, nous les négligeons. Nous pouvons écrire les équations qui régissent les trois modes du modèle de LORENZ, c'est-à-dire la composante verticale de vitesse  $w_0$ , la composante fondamentale de modulation température  $\theta_0$  et son harmonique 2  $\theta_2$ . Nous utilisons par ailleurs le fait que le vecteur d'onde du mode fondamental est le vecteur d'onde critique  $k_c = \pi/\sqrt{2}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t} = \sigma \left[ \frac{\theta_0}{3} - 3\pi^2 \frac{w_0}{2} \right] \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = R_a w_0 + \pi \theta_2 w_0 - 3\pi^2 \frac{\theta_0}{2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{\pi}{2} \theta_0 w_0 - 4\pi^2 \theta_2 \end{cases} \quad (\text{V.41})$$

En effectuant le changement de variable :

$$\begin{cases} T = \frac{3\pi^2}{2} t & X = \frac{9\pi^2}{2} w_0 \\ Y = \theta_0 & Z = -\frac{4}{27\pi^3} \theta_2 \end{cases} \quad (\text{V.42})$$

nous obtenons le modèle de LORENZ :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \sigma(Y - X) \\ \frac{dY}{dT} = rX - XZ - Y \\ \frac{dZ}{dT} = XY - bZ \end{cases} \quad (\text{V.43})$$

Avec  $r = 4R_a/27\pi^4$  est le nombre de Rayleigh réduit et  $b = 8/3$ .

Evidemment le point  $X = Y = Z = 0$  est un point fixe trivial, il est facile d'en étudier la stabilité en linéarisant autour de ce point fixe, il faut chercher les valeurs propres de :

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (\text{V.44})$$

qui correspondent aux racines de :

$$(b - r)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0 \quad (\text{V.45})$$

comme  $r$  ne peut être que positif, une instabilité apparaît lorsque le produit des racines  $(1 - r)$  devient négatif ce qui conduit à une racine positive. Dans le régime  $r > 1$  la convection prend la place de la conduction. tant que  $r$  reste petit, on montre facilement que  $X = Y$  et  $Z = X^2/b$ . Ce cas est celui d'une solution stationnaire où le mode  $Z$  (l'harmonique 2 en  $z$ ) est esclave des modes fondamentaux et on peut simplifier le modèle en une seule équation qui prend la forme :

$$\frac{dY}{dT} = (r - 1)Y - \frac{1}{b}Y^3$$

Nous reconnaissons l'équation d'une bifurcation fourche qui régit ici l'amplitude du mode de température.

On obtient des solutions chaotique pour  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ , comme on peut le voir sur les figures V.9,V.10. Le modèle de LORENZ a joué un rôle important dans la découverte du chaos car c'est ce type de solutions chaotiques qui ont permis de visualiser les premiers attracteurs étranges. Cependant ce régime de grand nombre de Rayleigh est incompatible avec les hypothèses faites lors du calcul. (l'harmonique 2 en  $z$  est beaucoup plus grand que le gradient de température qui est censé lui donné naissance.)

## V.4 Equations d'amplitude

Comme nous venons de le voir, établir les équations linéaires pour décrire l'apparition de la convection est déjà

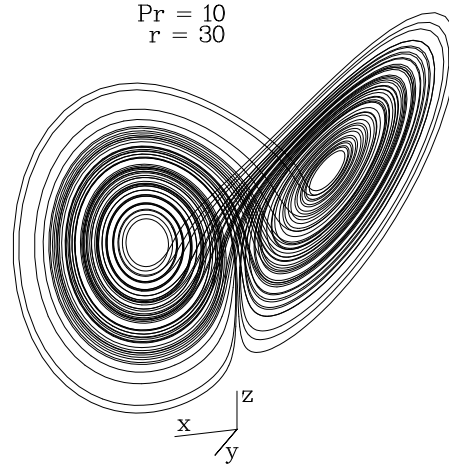


FIG. V.10: Autre vue en perspective de l'attracteur de LORENZ

une opération fastidieuse, le calcul des non-linéarités est encore plus délicat. Toutefois il existe un formalisme qui permet d'établir une équation non-linéaire modèle bien utile dans le domaine de paramètre voisin du seuil de convection. Nous présentons ici la méthode dite de "développement en  $\epsilon$ " mais nous ne l'appliquerons pas à la convection de Rayleigh-Bénard, nous utiliserons un modèle de SWIFT HOHENBERG qui a le mérite de conduire à des calculs plus simples.

### V.4.1 Un modèle simplifié pour la convection

SWIFT et HOHENBERG ont introduit une équation différentielle à une dimension dont les solutions sont périodiques avec un vecteur d'onde  $q_0$ . Cette équation a la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\epsilon - \square^2)u - u^3 \quad \text{avec} \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + q_0^2 \quad (\text{V.46})$$

Cette équation veut décrire les modulations de température dans la convection par exemple, on constate que l'opérateur  $\square^2$  est nul si la solution est de la forme  $\sin qx_1$  avec  $q = q_0$ ; sinon il prend une valeur positive est a un rôle stabilisant dans l'équation V.46. Dès que  $\epsilon$  est positif, une solution périodique va apparaître, nous allons voir que les non-linéarités en  $u^3$  vont stabiliser son amplitude.

### V.4.2 Développement multi-échelles

Nous allons chercher une solution  $u$  de l'équation V.46 sous forme d'un développement en  $\epsilon$  :

## A l'ordre $\epsilon^{3/2}$

$$u = u_{1/2}\epsilon^{1/2} + u_1\epsilon + u_{3/2}\epsilon^{3/2} + \dots \quad (\text{V.47})$$

Où  $u_{1/2}$ ,  $u_1$  et  $u_{3/2}$  sont des fonctions à déterminer. La forme de se développement est directement inspiré des résultats que nous avons mis en évidence dans l'instabilité Frederiks, c'est-à-dire que l'amplitude du mode varie comme  $\epsilon^{1/2}$ . Par ailleurs, nous avons aussi remarqué que l'épaisseur d'une paroi avait un comportement critique en  $\epsilon^{-1/2}$ . L'échelle spatiale des modulations d'amplitude dépend donc elle aussi de  $\epsilon$ . Toutefois la fréquence spatiale de la solution  $\sin q_0 x$  elle est indépendante de  $\epsilon$ . Nous devons donc introduire deux échelles de longueurs, l'une indépendante de  $\epsilon$  dite l'échelle rapide, que nous décrirons avec la variable  $x$ , l'autre l'échelle lentement variable que nous décrirons par  $X$  avec  $X = \epsilon^{1/2}x_1$ . De la même façon, nous devons tenir compte du ralentissement critique près de la bifurcation, et introduire un temps lentement variable  $T = \epsilon t$ . Nous devons maintenant introduire ces changements dans l'équation V.46 que nous écrivons avec les transformations :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} \epsilon^{1/2} \quad (\text{V.48})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \epsilon \quad (\text{V.49})$$

L'équation V.46 devient :

$$\begin{aligned} & \square^2 u + 4\epsilon^{1/2} \left( \square \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \right) u \\ & \epsilon \left( \frac{\partial}{\partial T} + 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \square + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - 1 \right) \\ & + 4\epsilon^{3/2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^3}{\partial X^3} \right) u + \epsilon^2 \frac{\partial^4}{\partial X^4} u = u^3 \end{aligned} \quad (\text{V.50})$$

En remplaçant  $u$  par son développement on peut résoudre ordre par ordre, on obtient ainsi :

### A l'ordre $\epsilon^{1/2}$

$$\square^2 u_{1/2} = 0$$

ce qui conduit à :  $u_{1/2} = A_{1/2}(X)e^{iq_0 x} + c.c.$

$u_{1/2}$  est donc périodique de vecteur d'onde  $q_0$  mais nous ne pouvons prédire l'amplitude de cette solution à ce stade du développement. **A l'ordre  $\epsilon$**

$$\square^2 u_1 + 4 \left[ \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} \square \right] u_{1/2} = 0$$

puisque  $\square u_{1/2} = 0$  nous avons  $\square^2 u_{1/2} = 0$

ce qui conduit à :  $u_1 = A_1(X)e^{iq_0 x} + c.c.$

$$\begin{aligned} u_{1/2}^3 &= \square^2 u_{3/2} + 4 \left[ \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} \square \right] u_1 \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial T} + 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \square + 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - 1 \right] u_{1/2} \end{aligned} \quad (\text{V.51})$$

puisque  $\square u_{1/2} = 0$  et  $\square u_1 = 0$ , nous obtenons :

$$\square^2 u_{3/2} + \left[ \frac{\partial}{\partial T} + 4 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] u_{1/2} = u_{1/2}^3$$

le membre de gauche est le terme non-linéaire qui correspond à deux contributions, un terme en  $e^{3iq_0 x}$  qui va donner lieu à un harmonique trois, et un terme en  $e^{iq_0 x}$  qui est un terme résonnant.

- en résolvant en  $e^{3iq_0 x}$

nous obtenons :  $\square^2 u_{3/2} = A_{1/2}^3 e^{3iq_0 x} + c.c.$ , soit  $u_{3/2} = {}_3A_{3/2} e^{3iq_0 x} + c.c.$  avec l'amplitude de l'harmonique trois donnée par :

$$\boxed{{}_3A_{3/2} = -\frac{A_{1/2}^3}{64q_0^2}}$$

- en résolvant en  $e^{iq_0 x}$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} + 4 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] u_{1/2} = u_{1/2}^3$$

qui conduit à l'équation d'amplitude :

$$\boxed{\frac{\partial A_{1/2}}{\partial T} = A_{1/2} + 4q_0^2 \frac{\partial^2 A_{1/2}}{\partial X^2} - 3A_{1/2} A_{1/2}^* A_{1/2}} \quad (\text{V.52})$$

### V.4.3 Amplitude en fonction de $q$

L'équation d'amplitude va nous permettre de comprendre la forme de la solution dans le domaine où  $\epsilon$  est positif mais petit. Nous pouvons déjà estimer l'amplitude de la solution stationnaire en fonction du vecteur d'onde  $q$ . Il ne faut pas oublier que nous avons fait des changements de variables pour obtenir l'équation d'amplitude. En particulier, celle-ci ne contient plus de dépendance en  $\epsilon$ , c'est parcequ'elle est écrite dans les variables  $X$  et  $T$ . En revenant aux variables du laboratoire, les dépendances en  $\epsilon$  vont apparaître à nouveau.

Les solutions stationnaires correspondent à  $\partial A_{1/2} / \partial T = 0$ , les solutions de l'équation d'amplitude sont alors de la forme :

$$A_{1/2} = A_Q e^{iQX}$$

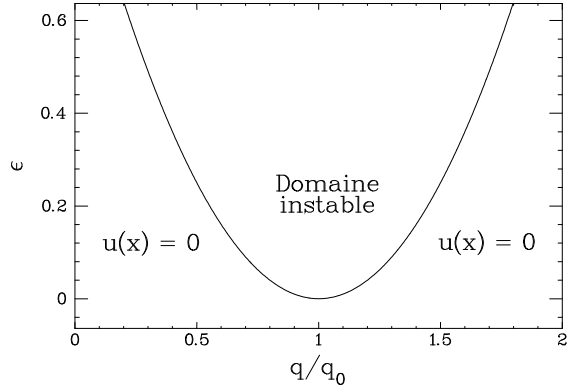


FIG. V.11: Courbe de stabilité marginale.

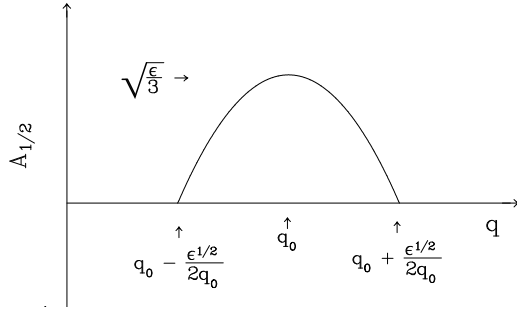


FIG. V.12: Amplitude d'un mode de vecteur d'onde  $q$ .

qui conduit à :  $A_Q - 4q_0^2 Q^2 A_Q - 3A_Q A_Q^* A_Q e^{iQX} = 0$   
soit à la solution :

$$|A_Q| = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - 4q_0^2 Q^2)^{1/2}$$

En revenant dans les coordonnées du laboratoire, nous obtenons :

$$u(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - 4q_0^2 \frac{\Delta q^2}{\epsilon} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} e^{i(q_0 + \Delta q)x} + c.c.$$

Avec  $\Delta q = q - q_0$ . L'amplitude est maximum à  $q = q_0$ , elle s'annule lorsque  $\Delta q = \epsilon^{1/2}/2q_0$  c'est-à-dire sur la courbe de stabilité marginale définie par le problème linéaire.

#### V.4.4 Instabilité d' ECKHAUS

Reprenons l'équation d' amplitude V.52 et faisons les changements de variables suivant :

$$\mathcal{A} = \sqrt[3]{3} A_{1/2} \text{ et } U = \frac{X}{2q_0}$$

on obtient :

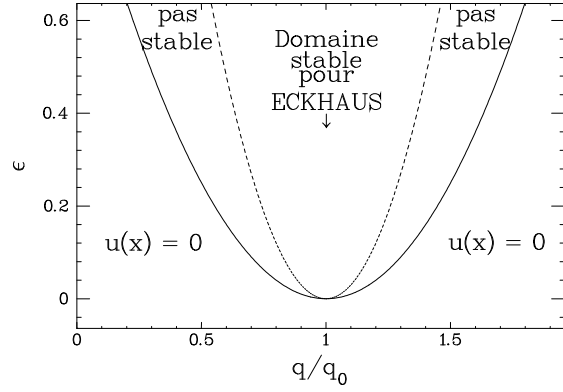


FIG. V.13: Courbes de stabilité marginales pour la convection en trait plein, pour l'instabilité d'ECKHAUS en pointillés. Les régions comprises entre les deux paraboles correspondent à des solution de convection instable.

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T} = \mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial U^2} - \mathcal{A} \mathcal{A}^* \mathcal{A} \quad (\text{V.53})$$

étudions la stabilité de la solution  $\mathcal{A} = (1 - Q^2)^{1/2} e^{iQU}$ , ajoutons lui une perturbation " $w$ " et cherchons l'évolution linéaire de  $w$ . Il vient :

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\partial^2 w}{\partial U^2} + w - 2(1 - Q^2)w - (1 - Q^2)e^{2iQU} w^*$$

#### Choix de la perturbation en $w$

Les perturbations que l'on cherche sont celles qui sont voisines du mode  $\mathcal{A}$ . Choisissons en une du type :  $e^{i(Q+M)U}$  où  $M \rightarrow 0$ . Si l'on injecte cette perturbation dans V.53 elle fait apparaître le mode :  $e^{i(Q-M)U}$  du au terme en  $e^{2iQU}$  dans V.53.

Adoptons une perturbation du type :

$$w = w_1 e^{i(Q+M)U} + w_2 e^{i(Q-M)U}$$

on en déduit le système d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (Q+M)^2 - 2(1-Q^2) & Q^2 - 1 \\ Q^2 - 1 & 1 - (Q-M)^2 - 2(1-Q^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (\text{V.54})$$

Il nous faut rechercher les valeurs propres  $\lambda$  de cette matrice :

$$\lambda^2 + 2\lambda(M^2 + 1 - Q^2) + M^4 + 2M^2(1 - 3Q^2) = 0$$

On remarque que la somme des racines est négative, si leur produit  $\lambda_1 \lambda_2 = M^4 + 2M^2(1 - 3Q^2)$  est

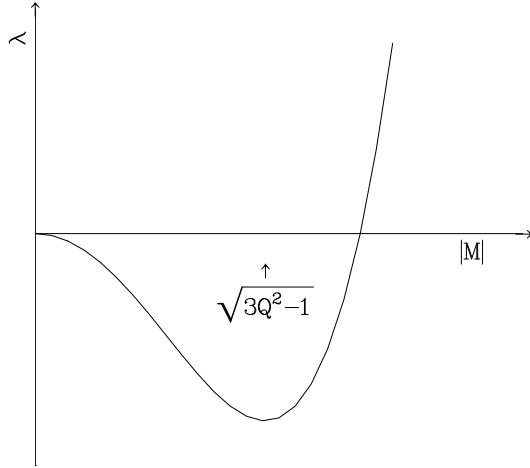


FIG. V.14: Evolution de la valeur propre définissant le taux de croissance de la modulation dans l'instabilité d'ECKHAUS.

positif les deux valeurs propres sont négatives et la perturbation relaxe ; le système est stable. Par contre dès que le produit des racines devient négatif une instabilité apparaît, c'est l'instabilité d'ECKHAUS.

Le critère d'intabilité correspond à  $Q \geq \pm 1/3$

Le mode le plus instable est celui pour lequel  $\lambda$  est le plus grand en module c'est-à-dire le minimum de  $M^4 + 2M^2(1 - 3Q^2)$ , soit  $|M| = \sqrt{2(3Q^2 - 1)}$ . L'évolution de la valeur propre instable prend la forme de la figure V.14 que l'on retrouve très souvent dans les instabilités hydrodynamiques. C'est une instabilité de grand vecteur d'onde, c'est-à-dire que  $|M|$  tend vers zéro lorsque lon approche le seuil de l'instabilité. Si  $Q > 1/3$ , un vecteur d'onde  $M$  non nul présente un taux de croissance maximale.

#### V.4.5 Diagramme de stabilité

Nous devons revenir à des vecteurs d'onde physique, en effet  $Q \sim \sqrt{\epsilon}$  nous avons donc un diagramme de stabilité décrit par la figure V.13. Le critère d'instabilité d'ECKHAUS correspond à une parabole "trois fois plus courbée" que la parabole de stabilité marginale. L'instabilité d'ECKHAUS restreint la bande de modes instable, plus précisément elle en limite les vecteurs d'onde. Comme l'amplitude des modes dépend fortement de leur vecteur d'onde (voir figure V.12) et décroît fortement dans les régions où l'instabilité d'ECKHAUS apparaît, celle-ci peut se comprendre comme compétition entre modes : si un mode établi est perturbé par un autre, il résistera si son amplitude est grande. Si par contre, son amplitude ne correspond pas au maximum, il se peut que la perturbation fasse naître un mode dont le vecteur d'onde possède une plus forte amplitude qui va finalement détrôner le mode initial.

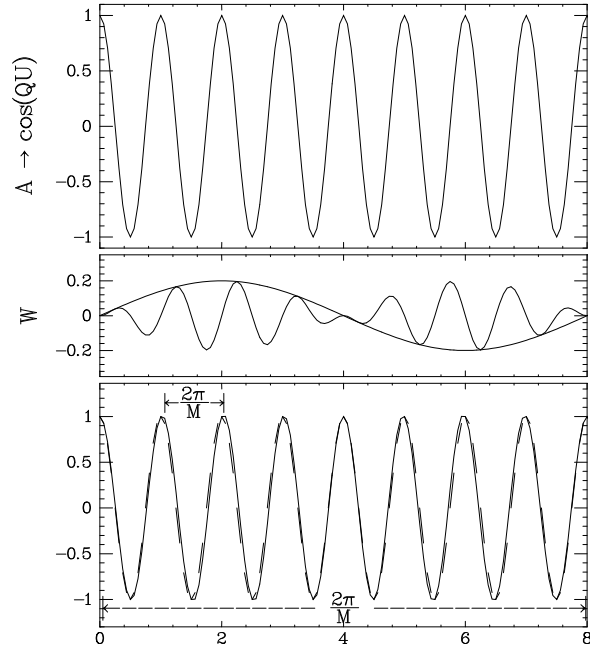


FIG. V.15: En haut la structure sans modulation, au milieu forme de la perturbation. En bas, forme des cellule convective réelle, la modulation change la longueur d'onde locale (à comparer à la structure non perturbée en pointillé).

#### V.4.6 L'instabilité d'ECKHAUS est une instabilité de phase

Pour déterminer la nature de l'instabilité, étudions la perturbation  $\omega$  dans le cas où l'instabilité d'ECKHAUS vient juste d'apparaître : c'est-à-dire lorsque  $3Q^2 - 1$  est tout juste positif, on peut alors simplifier la matrice déterminant  $\omega$  et calculer les valeurs propres  $\lambda_i$  et les vecteurs propres  $\omega_i$ . l'équation V.54 devient :

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 - 1 & Q^2 - 1 \\ Q^2 - 1 & Q^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{V.55})$$

La valeur propre instable correspond au vecteur propre tel que  $w_1 = w_2$  c qui implique que  $w = -\frac{1}{4}w_1 \sin(MU) \sin(QU)$  tandis que  $A$  est en  $\cos(QU)$ . Comme on peut le voir sur la figure V.15, cette perturbation correspond à une modulation de phase ou d fréquence. L'instabilité d'ECKHAUS correspond donc à une modulation de la longueur d'onde du motif convectif. Localement, les cellule qui ont une longueur d'onde qui se rapproche de l'optimum voient leur amplitude augmenter.

#### V.4.7 Autres instabilités

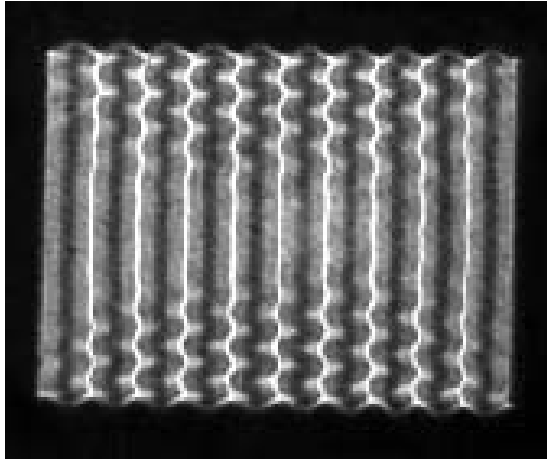


FIG. V.16: Intabilité oscillatoire : Structure convective de Rayleigh Bénard de rouleaux droits dans une boîte rectangulaire. Cette structure présente des ondes se propagent le long des rouleaux.

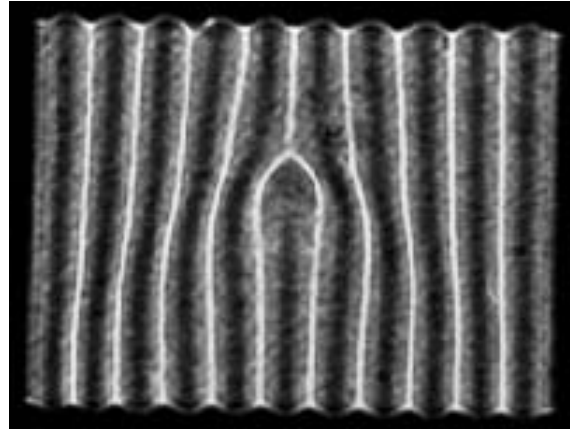


FIG. V.18: Dislocation : dans une structure convective de Rayleigh Bénard de rouleaux droits dans une boîte rectangulaire, une paire de rouleaux supplémentaire est apparue dans la partie basse conduisant à la formation d'une dislocations.

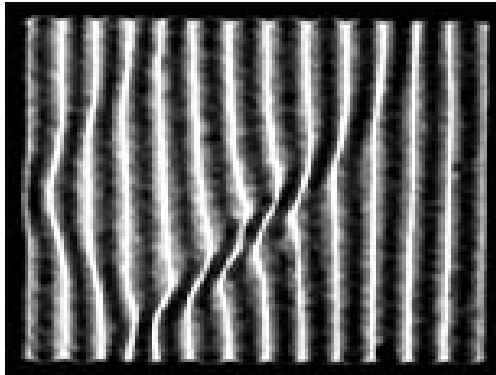


FIG. V.17: Intabilité Skewed-varicose : A partir d'une structure convective de Rayleigh Bénard de rouleaux droits dans une boîte rectangulaire, une instabilité de pincement oblique se développe et conduit à l'apparition de dislocations.

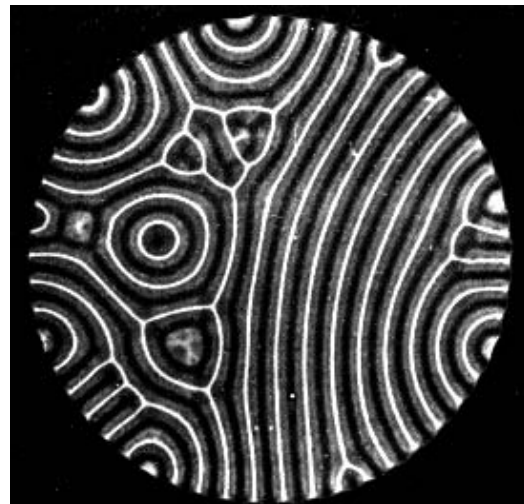


FIG. V.19: Structure convective de Rayleigh Bénard dans une boîte cylindrique. Cette structure présente de nombreux défauts.

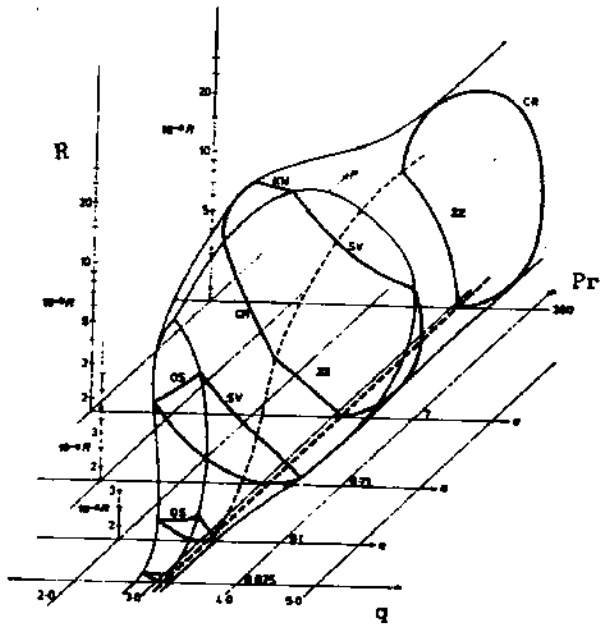


FIG. V.20: Ballon de Busse : ce diagramme à trois dimensions définit le domaine stable des rouleaux droits en fonction de leur vecteur d'onde  $k$  (suivant  $x$ ), du nombre de Rayleigh  $R$  (suivant  $y$ ) et du nombre de Prandtl  $Pr$  (suivant  $z$ ). Le nombre de Prandtl est caractéristique du fluide utilisé.