

Géomorphogénèse

Chapitre 3

B. Andreotti

2011/2012

Plasticité, frottement, rupture Avalanche; lave prismée; séisme; dyke

1 Les états de la matière du point de vue thermodynamique

1.1 Densité

Solide et liquide: états condensés de la matière i.e. relativement denses et de masses volumiques comparables (celles des liquides en général plus faibles que celles des solides, mais du même ordre de grandeur : 10% d'écart pour un corps donné):

- distance inter-atomique : $d \sim a \sim \text{Å}$.
- libre parcours moyen dans un liquide : $\bar{l} \sim a$.
- taille d'un grain d'orientation donnée dans un solide polycristallin : $D \sim \mu\text{m}$.

Gaz: état dilué. Libre parcours moyen grand devant la taille moléculaire:

- taille atomique : $a \sim \text{Å}$
- distance interatomique moyenne : $d = (k_B T / P)^{1/3} \simeq 3\text{nm}$ @ 300 K et 1 atm ($V_{\text{mol}} = 22.4\text{ L}$).
 $d \gg a$.
- libre parcours moyen (mean free path) — distance parcourue par un atome entre deux chocs successifs : $\bar{l} \simeq \frac{d^3}{4\pi a^2} \gg d$ ($\sim 100d$ @ 300 K et 1 atm).

1.2 Structure

Du point de vue **thermodynamique**, les états fluides s'opposent à l'état solide par leur absence d'ordre translationnel à grande distance.

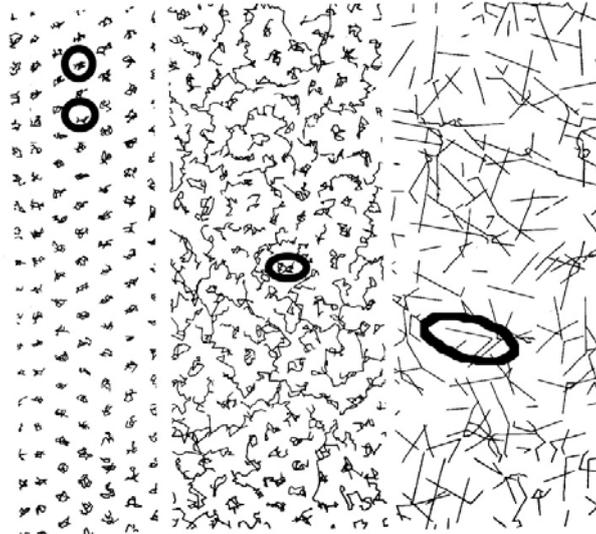
Solide: molécules astreintes à vibrer autour de positions moyennes fixes. Ordre translationnel à grande distance.

Liquide ou gaz: molécules libres de se déplacer au hasard par activation thermique. Etat liquide: le désordre prédomine à longue distance. Etat gazeux (c.n.): pratiquement pas d'interaction entre molécules

1.3 Diagramme de phase

La transition entre les différents états s'accompagne de la discontinuité de certaines grandeurs thermodynamiques qui permettent de construire un diagramme des phases sans ambiguïté et sans avoir recours à une mesure des propriétés mécaniques. Par exemple, nous savons que, à la pression atmosphérique, l'eau se liquéfie à 0 C et se vaporise à 100 C, que l'hélium reste liquide à 0 K.

Le point critique d'un corps pur est le point d'une courbe reliant pression, température et masse volumique tel que la transition de phase entre l'état liquide et l'état gazeux est impossible — la masse volumique des deux états du corps considéré étant désormais de même valeur à partir



H.B. d'après Barker-Henderson, *Pour la Science* 1982

de ce point, de même que l'indice de réfraction à l'état gazeux et celui à l'état liquide, quel que soit l'état précédent (liquide ou gazeux). Exemple de l'eau : température critique = 374.15°C , pression critique = 221.2 bars. Le point critique ne doit pas être confondu avec le point triple des diagrammes de phase traditionnels.

1.4 Mésophases

Il existe des états thermodynamiques intermédiaires comme les cristaux liquides, qui gardent un ordre translationnel selon certaines directions de l'espace. Ces **mésophases** ont des propriétés mécaniques mixtes violemment anisotropes. Les cristaux liquides sont des systèmes possédant un nombre de symétries intermédiaire entre ceux des phases solides et liquides. Leur molécules ont généralement une forme allongée ou de disque, forme encourageant un comportement directionnel collectif. Ce comportement est aussi influencé par un certain nombre de paramètres extérieurs comme les forces mécaniques, électriques ou magnétiques. Ils sont également sensible à la température, solides à basse température, et liquides à haute température. Ce phénomène peut, par exemple, être observé sur des écrans portables quand il fait très chaud ou très froid. Il y a deux grandes classes de cristaux liquides : les cristaux liquides thermotropes et les cristaux liquides lyotropes. Les thermotropes changent de phase en fonction de la température tandis que les lyotropes sont des substances dans lesquelles les mésophases sont induites par la présence d'un solvant et dépendent de la concentration comme de la température.

Le comportement des cristaux liquides est lié à leur structure interne. Par exemple, un cristal liquide peut couler comme un liquide, mais les molécules ont un certain niveau d'ordre et sont orientées comme dans un cristal. Les différentes phases des cristaux liquides peuvent être distinguées par leurs propriétés optiques différentes (comme la biréfringence). Vu dans un microscope sous lumière polarisée, un matériau à cristaux liquides semblera être composé de zones de texture distincte. Chaque "zone" correspond à un domaine où les molécules sont orientées dans une direction différente.

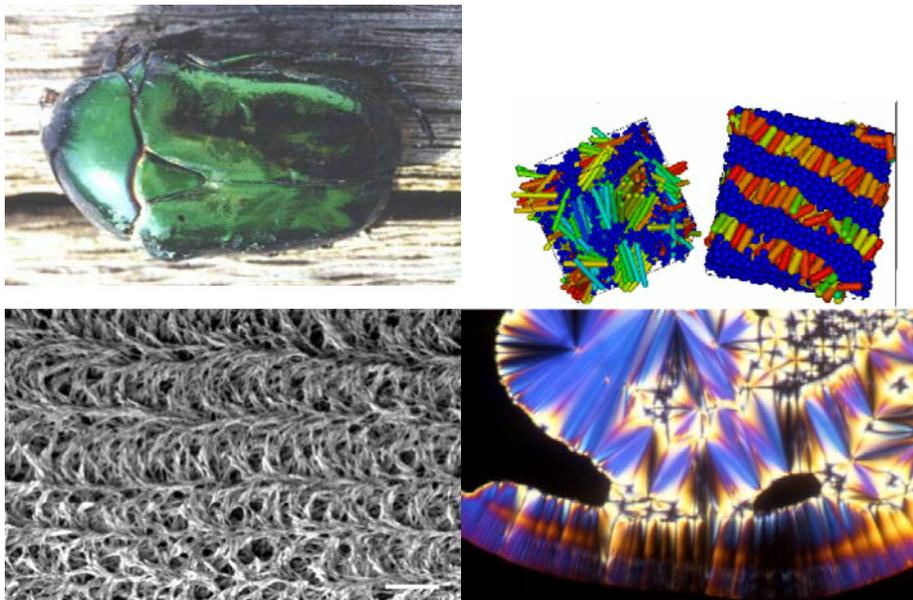
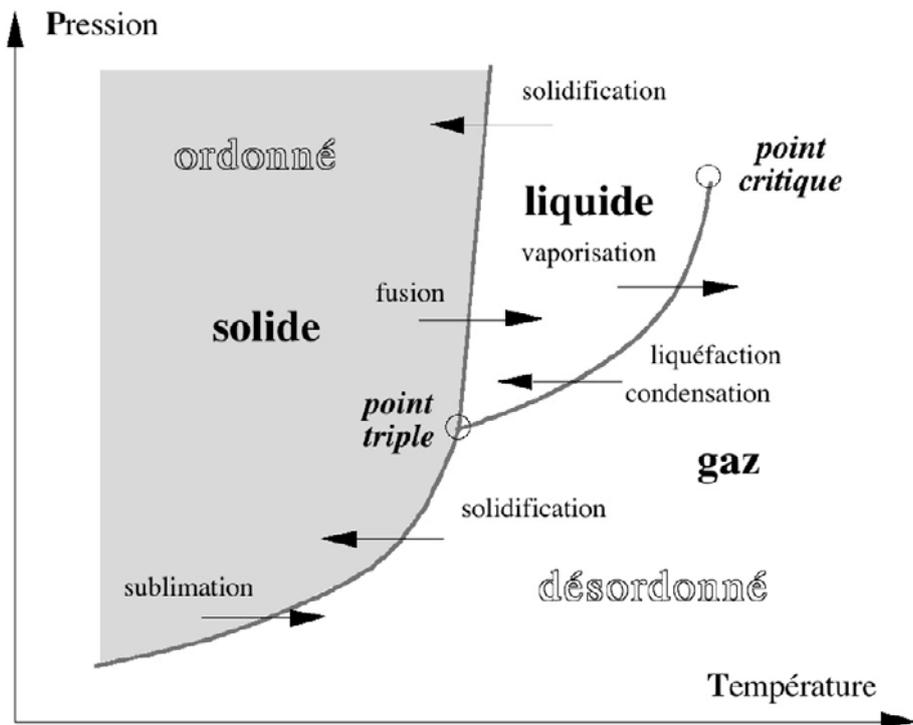


Figure 1: Exemple de cristaux liquides.



2 Les états de la matière du point de vue mécanique

2.1 Elasticité et plasticité

Du point de vue **mécanique**, un fluide peut être déformé de façon très importante de sorte que les molécules changent constamment de voisin. A l'inverse, un solide élastique ne se déforme que très faiblement. Ceci permet une classification au premier ordre. Il existe cependant moult comportements intermédiaires :

Les solides n'ont un comportement élastique qu'à faible sollicitation : ils peuvent avoir un comportement **plastique** pour lesquels il y a réarrangement moléculaire. La courbe reliant contraintes et déformations n'est alors plus réversible. Lorsque la vitesse de déformation est lente et la température élevée, on parle de fluage. La ductilité désigne la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre. La rupture se fait lorsqu'un défaut (fissure ou cavité), induit par la déformation plastique, devient critique et se propage. La ductilité est donc l'aptitude qu'a un matériau à résister à cette propagation. S'il y résiste bien, il est dit ductile, sinon il est dit fragile. On parle de rupture ou d'endommagement pour les matériaux fragiles. La contrainte délimitant le domaine élastique des autres domaines est appelée limite d'élasticité (yield strength en anglais). Lorsqu'au delà du seuil de plasticité, la contrainte dépend du taux de déformation, on parle de comportement visco-plastique. On dit que l'on a affaire à un fluide à seuil. Nous revenons ci-après sur cette loi de comportement.

2.2 Comportement Newtonien d'un fluide

Sur le même principe que pour l'élasticité, on construit dans le cas d'un fluide visqueux la relation constitutive à partir du tenseur des taux de déformation:

$$\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où x_i et v_i désignent respectivement les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse selon la direction i . Le tenseur des contraintes s'écrit:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta \left(\bar{s}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{s}_{ll}\delta_{ij} \right) + \zeta \bar{s}_{ll}\delta_{ij}$$

où η est la viscosité dynamique (de cisaillement) et ζ la seconde viscosité ou viscosité de volume. Dans le cas d'un fluide incompressible, la seconde viscosité n'intervient pas de sorte que le tenseur des contraintes se réduit à:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta\bar{s}_{ij}$$

2.3 Rhéologie

Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides, dont certains sont d'usage très courant, qui ont un comportement sous écoulement plus complexe. La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive. Les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse, ce qui implique que :

- Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non-newtonien. La description des ces comportements et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie. Cette discipline est assez récente ; elle a connu un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques.

Commençons par examiner le caractère non-newtonien le plus répandu, la variation de viscosité avec la vitesse de cisaillement. Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidifiant (shear thinning en anglais). Ce comportement est également observé dans les suspensions de particules solides, dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang. On peut représenter phénoménologiquement ce comportement par une viscosité η dépendant en loi de puissance du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Cette dépendance peut parfois être justifiée, comme dans le cas des polymères fondus (modèle d'Ostwald).

Un cas particulier du comportement rhéofluidifiant est l'existence d'une contrainte seuil d'écoulement : si la contrainte appliquée au fluide est inférieure à cette contrainte seuil, aucune déformation ne se produit, le fluide ne coule pas. Un exemple courant de fluide à seuil est la pâte dentifrice : elle ne peut sortir du tube sous l'effet de son propre poids, il faut lui appliquer une contrainte nettement supérieure pour qu'elle s'écoule. La représentation la plus simple d'un fluide à seuil est le modèle de Bingham qui donne la relation suivante entre la contrainte σ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$:

$$\sigma = \sigma_s + \eta\dot{\gamma}$$

où σ_s est la contrainte seuil et η est appelé la viscosité plastique. En pratique le modèle de Bingham ne s'applique que dans une gamme limitée de taux de cisaillements et la contrainte seuil, obtenue par extrapolation du rhéogramme à $\dot{\gamma} = 0$, est souvent difficile à déterminer correctement.

On rencontre également le comportement rhéoépaississant (en anglais shear thickening) : la viscosité augmente lorsqu'on augmente le taux de cisaillement. Dans la plupart des cas connus, le comportement rhéoépaississant n'est observé que sur une gamme limitée de taux de cisaillement, le liquide possédant également un comportement rhéofluidifiant à des taux de cisaillement plus faibles. Par exemple, les suspensions très concentrées (au-dessus de 30% en fraction volumique) de particules solides présentent une brusque augmentation de viscosité qui est liée à un changement important de la structure de la suspension. Un exemple remarquable de comportement rhéoépaississant est observé avec les polymères amphiphiles associatifs. La viscosité des ces solutions est pratiquement constante jusqu'à un taux de cisaillement critique où la viscosité augmente rapidement de plus d'un ordre de grandeur. Ce brutal "épaississement" de la solution est dû à un changement de type d'association entre les macromolécules : à faible taux de cisaillement, il y a

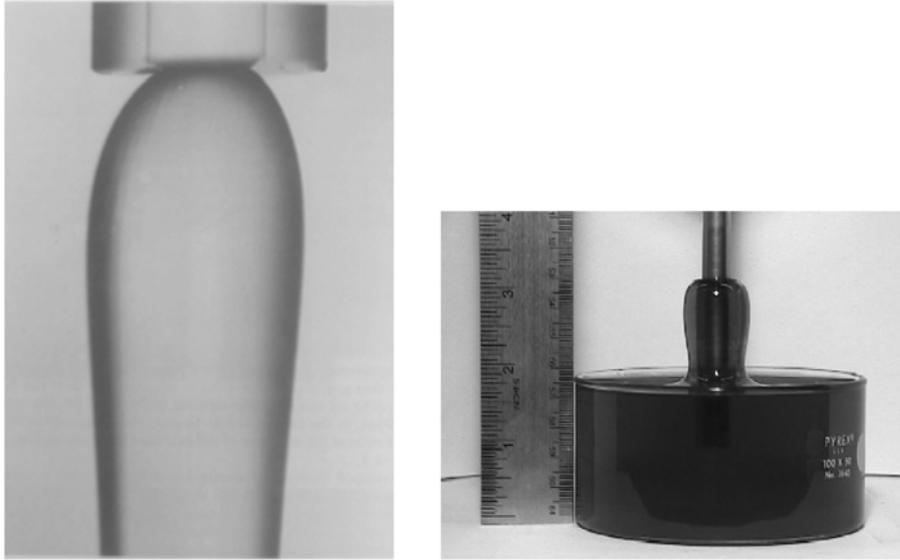


Figure 2: Effets de l'anisotropie des contraintes normales. Ascension d'une solution de polyisobutylène le long d'un barreau tournant ('à droite, photographie : J. Bico). Expansion d'un jet de solution de polyacrylamide à la sortie d'un orifice (à gauche, photographie : R.E. Evans).

essentiellement des interactions intramoléculaires et, dans une gamme de concentration adéquate, un taux de cisaillement élevé conduit à des interactions intermoléculaires et à la "gélification" de la solution.

Un autre comportement non-newtonien très important est le caractère viscoélastique, très fréquent dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Un exemple particulièrement spectaculaire de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom commercial de "silly-putty" : une boule de silly-putty rebondit sur le sol comme une balle de caoutchouc ; pourtant, si on pose cette boule sur une surface horizontale et si on attend quelques minutes, on voit le silly-putty s'étaler comme un fluide visqueux. Le même matériau réagit de manière très différente lorsqu'il est soumis à une sollicitation très rapide (en le faisant rebondir sur le sol) ou lorsque la contrainte est appliquée pendant un temps très long. Dans le premier cas, le temps de sollicitation est inférieur à un temps caractéristique du matériau, les composants élémentaires n'ont pas le temps de se déformer de manière importante et on observe une réponse élastique. En revanche, lorsque le temps de sollicitation est plus grand que le temps caractéristique, on observe une réponse de type visqueux. Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine élastique et les contraintes d'origine visqueuse :

$$\sigma = E\gamma + \eta\dot{\gamma}$$

Tous les liquides sont visco-élastiques. Cependant, dans la plupart des cas usuels, ce comportement **visco-élastique** n'est pas perceptible car le temps caractéristique η est ridiculement court : on a affaire à un fluide simple. D'autres fluides – faites l'expérience en touillant très lentement puis vite un bol de maizena dilué dans l'eau – ont des temps caractéristiques macroscopiques, ce qui entraîne moult comportements amusants.

Dans un fluide newtonien soumis à un écoulement de cisaillement simple ($u_x = \dot{\gamma}y$), seule la contrainte tangentielle σ_{xy} est modifiée par l'écoulement, les contraintes normales restent isotropes et égales à P . Dans certains liquides, essentiellement des solutions de polymères de très grande masse moléculaire, l'écoulement de cisaillement induit également une différence entre contraintes

normales:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = N_1(\dot{\gamma}) \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = N_2(\dot{\gamma})$$

L'anisotropie des contraintes normales est un effet non-linéaire : à faible taux de cisaillement, N_1 et N_2 sont des fonctions quadratiques de $\dot{\gamma}$. En général N_1 est négatif et beaucoup plus grand en valeur absolue que N_2 qui est généralement positif. L'apparition d'anisotropie des contraintes normales est lié au fait que l'écoulement de cisaillement modifie la microstructure du fluide et la rend anisotrope. Prenons l'exemple d'une solution de polymères : la macromolécule en solution a l'aspect d'une "pelote" de fil contenue dans une enveloppe sphérique. Lorsqu'elle est soumise à un cisaillement suffisamment fort, cette pelote se déforme en un ellipsoïde dont le grand axe à tendance à tourner vers la direction d'écoulement. L'élasticité du polymère, d'origine essentiellement entropique, à tendance à ramener cet ellipsoïde vers une forme sphérique. La force de rappel est maximale dans la direction de l'écoulement ; elle est responsable de l'apparition d'une compression le long de l'écoulement. Ceci implique donc que $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$, soit $N_1 < 0$. En revanche, il n'y a pas d'interprétation simple du signe de N_2 . L'anisotropie des contraintes normales a deux manifestations spectaculaires : l'ascension du fluide le long d'un barreau tournant (effet Weissenberg) et l'expansion du jet sortant d'un orifice. Dans l'écoulement engendré par le cylindre tournant, la vitesse est essentiellement azimuthale, avec un gradient radial. L'anisotropie des contraintes normales conduit ici à : $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_{rr}$. Il y a une "tension" le long des lignes de courant circulaires qui tend à pousser le fluide vers le centre de rotation et donc à le faire monter le long du cylindre tournant. Dans le cas du jet, l'expansion à la sortie de l'orifice est due à la relaxation des contraintes normales le long de l'axe du tube, accumulées pendant l'écoulement à l'intérieur du tube. Cet effet d'expansion intervient fréquemment dans les procédés d'extrusion des polymères fondus.

Cas des milieux granulaires.

Matériaux vitreux. Plasticité des amorphes.

3 Frottement

3.1 Conditions interfaciales avec sans glissement

Sans glissement: continuité du champ de déplacement et des contraintes normales. On dit qu'il y a frottement entre deux surfaces en contact lorsque leur mouvement relatif produit une force qui s'oppose à celui-ci. La notion même de frottement est très intuitive et intervient dans la vie quotidienne: se frotter les mains pour se réchauffer, craquer une allumette, jouer du violon, glisser sur la glace, freiner en voiture, entendre un crissement de craie sur le tableau, mettre de l'huile dans les gonds de porte, etc. La branche de la science qui s'intéresse au frottement s'appelle la tribologie.

3.2 Origine microscopique du frottement solide

La plupart des phénomènes associés au frottement peuvent se comprendre sur la base des lois phénoménologiques du frottement énoncées dès le XVIII siècle par Amontons et Coulomb. Ces lois empiriques font intervenir une quantité clef : le coefficient de frottement, coefficient sans dimension que l'on note en général μ . Plaçons un objet sur une surface plane; pour déplacer cet objet, de poids $P = F_N$, il faut exercer une force F_T parallèlement à la surface de la table. Mais l'expérience montre que cet objet ne déplacera pas tant que la force F_T est inférieure à une force minimale proportionnelle à la force normale F_N , donc ici au poids. Autrement dit, l'objet ne se déplace pas tant que

$$\sigma_{xz} < \mu_s \sigma_{zz}$$

ce qui définit le coefficient de frottement statique μ_s . D'autre part, si l'objet se déplace maintenant à vitesse constante sur la surface, l'expérience montre dans ce cas que la force de frottement tangentielle subie par l'objet est également proportionnelle à la force normale et (quasiment) indépendante de la vitesse. En terme de contraintes, cela s'écrit:

$$\sigma_{xz} = \mu_d \sigma_{zz}$$

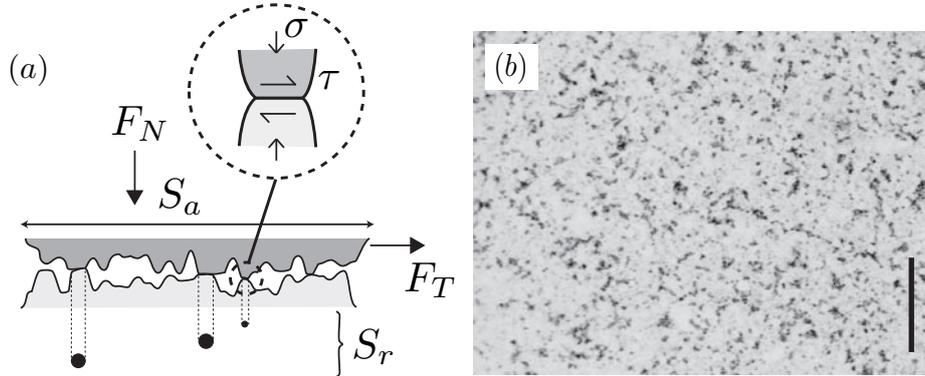


Figure 3: (a) Schéma d'un contact entre deux surfaces rugueuses (dessin d'après Bureau 2002). (b) Image en microscopie optique par transmission de l'interface entre deux blocs de résine époxy transparente. Les contacts apparaissent en noir. Barre d'échelle : 100 μm (photo Olivier Ronsin).

μ_d s'appelle le coefficient de frottement dynamique et est génériquement plus petit que μ_s . La valeur typique de ces coefficients de frottement s'écarte assez peu de $\mu \sim 0.3$, pour des surfaces très différentes les unes des autres. La technologie permet toutefois de concevoir des surfaces avec des coefficients de frottement bien plus petits ($\mu \sim 0.001$) ou bien plus grands ($\mu > 1$). Ces coefficients μ_s et μ_d ne dépendent pas de l'aire de contact de l'objet frottant: que l'on pose le kilo de sucre bien à plat ou sur la tranche, la force de frottement est la même. Ce résultat très contre-intuitif a défié l'imagination des scientifiques plusieurs siècles avant que Bowden et Tabor n'en proposent une explication dans les années 1950. La clef de ce phénomène est la rugosité de surface, qui conduit à des aires de contact réel entre les surfaces bien plus petites que l'aire de contact apparente.

Cette distinction entre surface réelle et surface apparente a été démontrée par visualisation optique directe de la surface de contact, notamment par Dieterich et Kilgore et plus récemment par Ronsin et Baumberger. Cette observation donne une image de zones de contact réel très clairsemées, avec une taille typique pour chaque zone de l'ordre du micron. Ainsi l'aire de contact réelle entre deux objets macroscopiques ne représente typiquement que 0.1% de l'aire de contact totale :

$$A_{\text{réelle}}/A_{\text{app}} \sim 0.001$$

Une conséquence immédiate est que la force normale à laquelle on soumet l'objet ne se répartit que sur les aspérités en contact et non sur l'ensemble de la surface de l'objet. En conséquence la contrainte normale au sein de ces contacts, c'est-à-dire la force par unité de surface est bien plus grande que celle que l'on attendrait a priori si la force se répartissait sur l'ensemble de la surface:

$$F_N = \sigma_{zz}^{\text{réelle}} A_{\text{réelle}} = \sigma_{zz} A_{\text{app}}$$

Or aux très grandes pressions, un matériau devient en général plastique, c'est à dire qu'il s'écrase sans que sa pression ne varie. La valeur de la pression à laquelle se déroule ce phénomène est appelée dureté du matériau, que l'on notera H . La pression au sein des contacts étant fixée à H , on en déduit alors que l'aire réelle du contact est directement proportionnelle à la force appliquée :

$$\sigma_{zz} = H \frac{A_{\text{app}}}{A_{\text{réelle}}}$$

Autrement dit, plus la force appliquée est grande, plus le contact réel est grand, ce qui est finalement assez intuitif. Ce mécanisme permet de retrouver les lois de Coulomb. En effet, l'aire

frottante étant l'aire réelle, on s'attend à ce que la contrainte de frottement tangentielle soit proportionnelle à cette aire :

$$\sigma_{xz} = \sigma_Y \frac{A_{\text{app}}}{A_{\text{réelle}}}$$

Le coefficient de proportionnalité σ_Y est la contrainte de cisaillement dans les zones plastifiées. On obtient finalement:

$$\sigma_{xz} = \frac{\sigma_Y}{H} \sigma_{zz} = \mu \sigma_{zz}$$

Combien y-a-t'il de contacts dans une interface. Prenons l'exemple d'une plaque d'acier d'épaisseur $h = 1$ cm, et de surface $A_{\text{app}} = 1$ cm².

Poids de la plaque : $F_n = \rho g h A_{\text{app}} = 8.10^3 \text{ kg.m}^{-3} \times 10 \times 10^{-6} = 8.10^{-2}$ N

Dureté de l'acier : $\sigma_Y \approx 10^9$ Pa

Aire de contact réelle : $A_{\text{réelle}} = F_N / \sigma_Y \approx 8.10^{-11} \text{ m}^2$

Nombre de contacts d'aire égale à $10 \mu\text{m}^2 \approx 8!$ C'est finalement très peu de contacts. La situation est encore pire si l'on considère un matériau peu plastique comme le verre!

Cette explication de Bowden et Tabor au phénomène de frottement permet de comprendre la proportionnalité de la force de frottement vis-à-vis de la force normale, mais également l'indépendance du coefficient de frottement vis-à-vis de la surface apparente de contact. Cette explication repose cependant sur l'hypothèse de déformation plastique des aspérités, qui, si elle est pertinente pour des métaux, pose question pour d'autres matériaux (comme par exemple les élastomères). De fait, Greenwood et Williamson ont montré dans les années 60 que le point clef du raisonnement précédent – la proportionnalité entre aire de contact réelle et force normale F_N – est maintenu même dans le cadre d'aspérités qui se déforment élastiquement, par un effet de moyenne statistique sur l'ensemble des aspérités en contact. Une autre hypothèse est l'indépendance de la contrainte de cisaillement σ_Y vis-à-vis des conditions de frottement, notamment de la vitesse. Ce point mérite de s'y attarder un peu plus longuement. La contrainte de cisaillement σ_Y est associée à la rhéologie des contacts à l'interface entre aspérités de tailles micrométriques. Des expériences récentes ont pu sonder indirectement les propriétés mécaniques de ces jonctions (Bureau et al.). Ces expériences suggèrent qu'à la jonction entre deux aspérités en contact, le matériaux se comporte comme un milieu "vitreux" et que la contrainte seuil est intimement associée à ces propriétés vitreuses. Les milieux vitreux sont des milieux dont la structure microscopique est désordonnée (comme un liquide), mais figée (comme un solide). Leur propriétés sont intermédiaires entre celles d'un liquide et celles d'un solide. En particulier ce sont des fluides à seuil, qui ne coulent pas au repos (comme des solides), mais s'écoulent au delà d'une contrainte minimale appliquée (comme des liquides). Le problème du frottement solide se ramène donc à celui d'une loi d'écoulement dans les zones plastifiées.

A température finie, la dureté H et la contrainte de cisaillement seuil σ_Y ne sont pas strictement définies. En effet, les processus de fluage de l'aire de contact sont thermiquement activés de sorte que l'aire de contact réelle croît logarithmiquement dans le temps. Par ailleurs, lorsque l'interface glisse, les contacts sont régénérés au bout d'un temps inversement proportionnel à la vitesse. Il s'ensuit une décroissance logarithmique du coefficient de friction avec la vitesse. Enfin, la contraintes dans les zones plastifiées peut croître avec la vitesse de cisaillement, de sorte que le coefficient de friction peut croître avec la vitesse, à grande vitesse.

3.3 Le stick-slip

On considère un patin tiré par un ressort à vitesse constante et soumis à un coefficient de friction $\mu(\dot{x})$. L'équation de la dynamique s'écrit:

$$m\dot{x} = k(Vt - x) - \mu(\dot{x})F_N$$

La solution stationnaire s'établit pour:

$$x = Vt - \mu(V) \frac{F_N}{k}$$

On perturbe la solution et on effectue une analyse de stabilité linéaire:

$$m\ddot{\varepsilon} = -k\varepsilon - \mu'(V)F_N\dot{\varepsilon}$$

L'équation étant homogène en temps, la solution est exponentielle, de taux de croissance σ :

$$m\sigma^2 + \mu'(V)F_N\sigma + k$$

La solution s'écrit:

$$\sigma = \frac{-\mu'F_N \pm i\sqrt{4km - (\mu'F_N)^2}}{2m}$$

Il y a donc instabilité dès que le coefficient de frottement décroît avec la vitesse V .

En passant dans le cadre de l'approximation de coefficients de friction constants, il est possible de décrire plus avant le phénomène de collé-glissé ("Stick-slip" en anglais) (Baumberger *et al.* 1994). Considérons à nouveau un patin solide posé sur un substrat relié à un ressort de raideur k . À l'instant $t = 0$, le ressort est au repos (allongement nul) et le patin à la position $x = 0$. On commence alors à tirer l'extrémité du ressort à la vitesse constante V (Fig. 4a). L'allongement du ressort est alors $\varepsilon = Vt - x(t)$. On appelle F_T la tension du ressort, R_T la force de friction, et $F_N = mg$ la force normale, où m est la masse du patin.

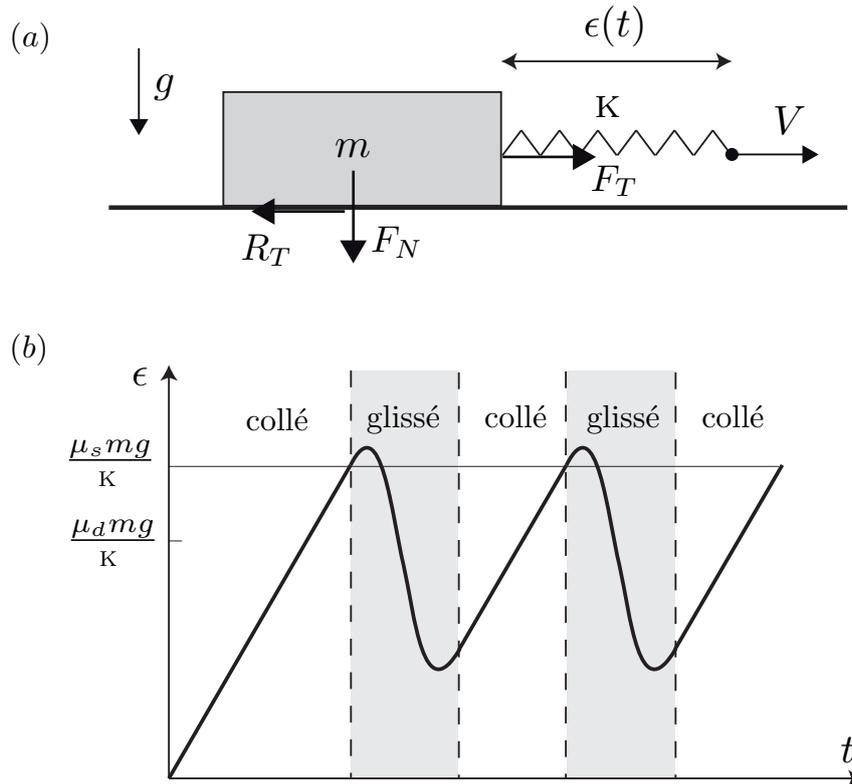


Figure 4: (a) Expérience typique de collé-glissé. (b) Evolution de l'allongement du ressort au cours du temps.

La dynamique du patin s'établit en deux temps :

1. Le patin est à l'arrêt et ne glissera pas tant que la tension F_T n'atteint pas la force critique $F_{Tc} = \mu_s F_N$. On a alors $\varepsilon = Vt$.
2. Ensuite le patin glisse et la force de friction est alors égale à $R_T = \mu_d F_N$. L'équation de la dynamique s'écrit alors

$$m\ddot{x} = k\varepsilon - \mu_d F_N, \quad (1)$$

ce qui s'écrit en terme d'allongement

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varepsilon = \frac{\mu_d}{m}F_N. \quad (2)$$

L'allongement ε oscille donc à la fréquence $\sqrt{k/m}$ autour de la valeur $\mu_d mg/k$. Lors de cette oscillation le patin va repasser par la vitesse nulle (lorsque $\dot{\varepsilon} = V$), et on est alors renvoyé à l'étape 1.

Le mouvement résultant est donc une succession d'étapes "collées" où le patin est à l'arrêt et le ressort s'allonge, et d'étapes "glissées" où le patin avance (Fig. 4b). On a là un exemple typique de phénomène non-linéaire, puisque une oscillation (de surcroît non harmonique) apparaît alors que le forçage est constant dans le temps. Cette non-linéarité provient de la non-linéarité de la loi de Coulomb.

Le mouvement périodique de "stick-slip" est à l'origine des grincements de portes, mais aussi des sons harmonieux générés par les instruments à cordes frottées comme le violon. À une échelle beaucoup plus grande, le phénomène de "stick-slip" fournit un modèle très simplifié pour expliquer les tremblements de terre (Nataf & Sommeria 2000). L'équivalent de l'interface patin/plan correspond au contact entre deux plaques tectoniques le long d'une faille. L'analogie du forçage à vitesse constante est la lente dérive des continents. Tant que la contrainte tangentielle entre les plaques n'atteint pas le seuil de friction statique, les deux lèvres de la faille reste plaquées l'une contre l'autre et de l'énergie élastique s'accumule dans la croûte terrestre, qui joue le rôle du ressort. Lorsque le seuil de frottement statique est atteint, l'énergie est brutalement relâchée sous forme d'ondes sismiques car le coefficient de friction dynamique est plus faible que le frottement statique.

3.4 Elements de correction du TD sur la rupture de Mohr-Coulomb

La géométrie nous indique alors que Ox et Oz sont des directions principales du tenseur des contraintes dans le matériau. Le tenseur des contraintes dans le repère (Ox, Oz) s'écrit donc simplement:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

D'après le critère de rupture, pour savoir si le matériau cède il faut tester sur toutes les orientations possibles si la relation ?? est vérifiée. Le cercle de Mohr nous donne la réponse. Considérons une surface unitaire dans le milieu indiquée par sa normale \mathbf{n} et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale (Fig. ??). Pour tester la relation ?? il faut calculer la force tangentielle τ et la force normale σ qui s'exerce sur cette plaque, connaissant le tenseur des contraintes σ_{ij} . La force \mathbf{f} sur la plaquette unitaire est donnée par $f_i = \sigma_{ij}n_j$, soit:

$$f_x = \sigma_{xx} \sin \theta, \quad (4)$$

$$f_y = -\sigma_{yy} \cos \theta. \quad (5)$$

Pour trouver la contrainte normale σ et tangentielle τ à la plaquette il suffit de changer de repère et projeter \mathbf{f} dans le repère lié à la plaquette (Fig. ??). Par convention σ est positif en compression, et τ est positif s'il fait tourner la plaquette dans le sens horaire.

Alors on a simplement:

$$\sigma = f_x \sin(\theta) - f_y \cos(\theta), \quad (6)$$

$$\tau = f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta). \quad (7)$$

En substituant les expressions de f_x et f_y (5) dans (7) on trouve finalement:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 + r \cos(2\theta), \\ \tau &= -r \sin(2\theta)\end{aligned}\quad (8)$$

avec

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad r = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}),$$

Les équations 8 nous donnent l'expression de la force normale et tangentielle sur la plaquette unitaire. Lorsque l'on fait tourner la plaquette, σ et τ décrivent un cercle de rayon r et de centre σ_0 : on l'appelle le cercle de Mohr (Fig. 5a). Pour trouver les forces sur la plaquette inclinée à θ il suffit de considérer le point sur le cercle qui forme un angle de -2θ avec le point C. Ainsi par exemple, le point B correspond à la plaquette orientée à $\pi/4$, le point D à la plaquette orientée à $3\pi/4$. Notons que la force tangentielle τ est maximum pour les deux plaquettes orientées à 45° des axes principaux.

Nous avons raisonné avec les axes Ox et Oz comme axes principaux mais la généralisation est immédiate pour d'autres situations: le tenseur des contraintes à deux dimensions est toujours représenté par un cercle avec le point A (resp. C) ayant pour abscisse σ_{min} (resp. σ_{maj}) la contrainte principale mineure (resp. majeure). Un point sur le cercle correspond aux forces sur une plaquette inclinée de θ par rapport à l'axe principal mineur, ou bien inclinée de θ' par rapport à l'axe principal majeur (θ et θ' sont définis sur la figure 5).

Connaissant maintenant les contraintes sur les plaquettes unitaires, nous pouvons tester le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Dans le plan de Mohr (σ , τ), le critère de rupture est simplement deux droites de pente $\pm \tan \delta$.

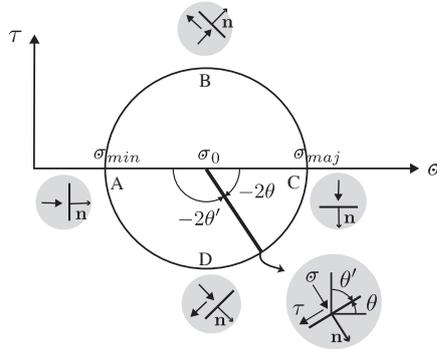


Figure 5: a) Cercle de Mohr; les insert circulaires montrent l'orientation des plaquettes dans l'espace physique. b) Représentation dans le plan de Mohr de l'état de contraintes d'un test biaxial avant et au seuil.

Nous avons donc maintenant en main tous les outils pour étudier le test biaxial. Au tout début de l'expérience, l'état de contrainte est $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$. Dans le plan de Mohr, l'état de contrainte se réduit à un point. Puis on augmente la contrainte verticale σ_{zz} . Le cercle s'agrandit comme sur la figure 5b. Mais le cercle reste en dessous de la ligne de rupture, ce qui signifie que quelque soit l'orientation de la plaquette dans l'échantillon, on aura, $|\tau| < \tan \delta \sigma$. Le matériau résiste donc. Il cédera lorsque le cercle de Mohr devient tangent à la droite de rupture i.e. quand pour une orientation on a $|\tau| = \tan \delta \sigma$.

On peut alors calculer la valeur de la contrainte verticale à la rupture en considérant le triangle rectangle $OO'C'$. On trouve alors: $\sin(\delta) = \frac{r}{\sigma_0}$ qui donne la contrainte verticale critique pour déformer le matériau :

$$\sigma_{yy_c} = \left(\frac{1 + \sin(\delta)}{1 - \sin(\delta)} \right) \sigma_{xx}. \quad (9)$$

On peut de plus déterminer les plans selon lesquels le critère de plasticité est atteint. Les deux points tangents forment un angle $2\theta' = \pm(\pi/2 - \delta)$ sur le cercle de Mohr avec le point O, ce qui signifie, qu'ils correspondent à des plaquettes orientées à $\pm(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2})$ de l'axe verticale, c'est à dire de l'axe principale majeur.

Nous allons appliquer les résultats précédents au problème d'un mur de soutènement. Un mur est construit pour retenir un milieu granulaire à sa gauche (Fig. 6a). On se demande quels sont les états de contraintes sur le mur. Dans ce problème les axes principaux sont Ox et Oz . La contrainte verticale à une altitude z est donnée par la gravité: $\sigma_{zz} = \rho gz$. On cherche quelles valeurs peut prendre σ_{xx} qui appuie sur le mur à une profondeur z . D'après les résultats précédents il est facile de montrer que σ_{xx} est compris entre deux limites qui correspondent au deux cas extrêmes pour lesquels le milieu va céder. La représentation dans le plan de Mohr (σ , τ) permet de trouver ces limites. On sait que le cercle représentant l'état de contrainte doit passer par le point $(\rho gz, 0)$. Or par ce point passent deux cercles limites tangents aux droites de ruptures, l'un à droite l'autre à gauche (Fig. 6b). Tous les cercles compris entre ces deux extrêmes correspondent à des états de contraintes que le milieu peut supporter sans céder. On conclut donc que la contrainte σ_{xx} est compris entre deux valeurs qui se calculent d'après 9:

$$\left(\frac{1 - \sin(\delta)}{1 + \sin(\delta)}\right) \sigma_{zz} < \sigma_{xx} < \left(\frac{1 + \sin(\delta)}{1 - \sin(\delta)}\right) \sigma_{zz}$$

Les deux états extrêmes nommés états limites de Rankine, sont également appelés état passif pour le cercle droit pour lequel $\sigma_{xx} > \sigma_{zz}$, et état actif pour le cercle de gauche où $\sigma_{xx} < \sigma_{zz}$. Le cas passif correspond au bulldozer : la paroi pousse sur le sable jusqu'à rupture. L'état limite actif est obtenu lorsque l'on recule la paroi. Le qualificatif de "passif" ou "actif" se réfère donc au sable: il est passif lorsqu'on pousse dessus (bulldozer), et actif lorsqu'il pousse le mur (Fig. ??).

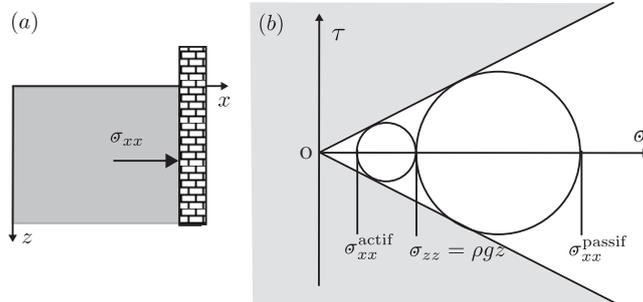


Figure 6: a) Problème du mur de soutènement b) Représentation dans le plan de Mohr des états limites de Rankine.

Dans le cas passif l'axe principal majeur est Ox , les lignes de failles sont donc orientées de $\pm(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2})$ par rapport à Ox , alors que dans le cas actif, les failles sont orientées $\pm(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2})$ par rapport à Oz (Fig. ??a). Un exemple de fracture observée lorsque l'on pousse sur le matériau (état passif) est présenté sur la Figure ??b.

4 Mise en écoulement d'un milieu granulaire

4.1 Le tas de sable

Considérons le tas de grains de la figure 7a. Quiconque ayant tenté un jour de fabriquer un tas de sable ou de sucre a observé qu'un angle maximum peut être atteint au-delà duquel une avalanche se déclenche. De même, lorsqu'un récipient initialement rempli de grains est lentement incliné, rien ne se passe jusqu'au déclenchement d'une avalanche lorsque l'inclinaison atteint une valeur critique θ_c , indépendante de la taille du récipient. Cette première observation est à rapprocher du

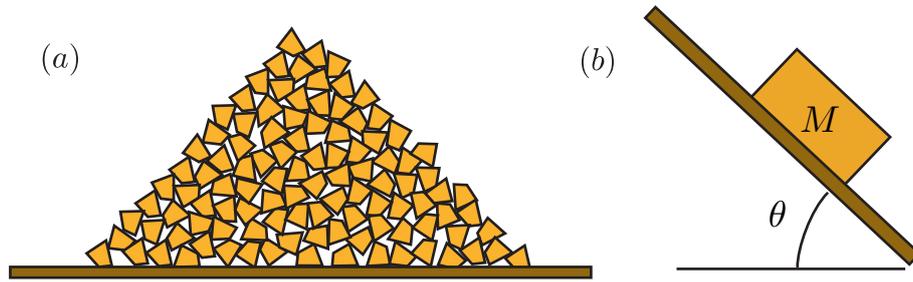


Figure 7: (a) Tas de sable. (b) Analogie avec le patin frottant.

problème du patin frottant posé sur un plan (Fig. 7b). Appelons $\tan \delta$ le coefficient de friction entre le patin et le plan, M la masse du patin et θ l'angle d'inclinaison. Le patin se met à glisser lorsque la force de gravité parallèle au plan $Mg \sin \theta$ devient égale à la force de friction maximale que peut supporter le patin, égale à $\tan \delta Mg \cos \theta$. Le patin se mettra donc à glisser lorsque θ devient égal à δ , indépendamment de la taille du patin. Cette première observation suggère donc que le critère de stabilité d'un milieu granulaire est un critère de frottement, l'angle de friction étant relié à l'angle maximum du tas que l'on peut construire. Pour l'étude de la plasticité, d'autres configurations pour lesquelles les déformations sont contrôlées sont plus judicieuses. C'est le cas de la cellule de cisaillement et du test triaxial, communément utilisés pour caractériser les sols, et que nous décrivons maintenant.

4.2 La cellule de cisaillement

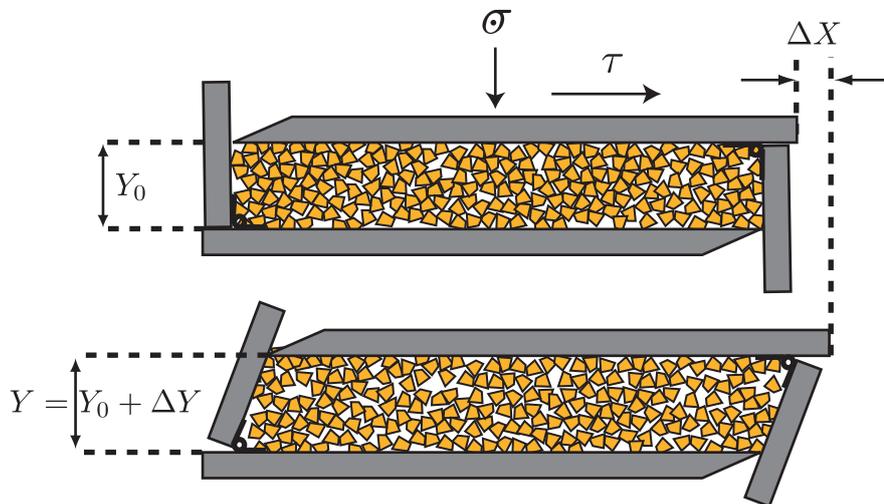


Figure 8: Principe de la cellule de cisaillement simple: une contrainte normale σ est appliquée sur la demi boîte supérieure et une déformation $\gamma = \Delta X/Y_0$ est imposée. On mesure la contrainte tangentielle τ et la variation de volume donnée par ΔY .

Une configuration plus simple pour étudier la plasticité des milieux granulaires est celle du cisaillement plan. L'idée est d'imposer une déformation contrôlée à un matériau granulaire et de mesurer les contraintes qui s'y développent. Un des dispositifs permettant de réaliser ces tests en mécanique des sols est la cellule de cisaillement ou boîte de Casagrande (Fig. 8). Le matériau granulaire est confiné dans une boîte formée de deux parties distinctes. Une contrainte normale σ

(force par unité de surface) est appliquée sur la demi-boîte supérieure, que l'on déplace lentement d'une distance ΔX par rapport à la moitié inférieure. On mesure alors simultanément, au cours de la déformation, la contrainte tangentielle τ qu'il faut appliquer et la fraction volumique de l'échantillon φ que l'on mesure en suivant le déplacement verticale ΔY de la demi boîte supérieure qui est libre de se soulever ou de s'affaisser. Les résultats d'expériences typiques sont présentés sur la figure 9 pour deux tests réalisés en partant d'états initiaux différents : les symboles pleins correspondent aux mesures effectuées en partant d'un empilement dense de grains obtenu en compactant les grains avant l'expérience, tandis que les cercles correspondent à un empilement lâche.

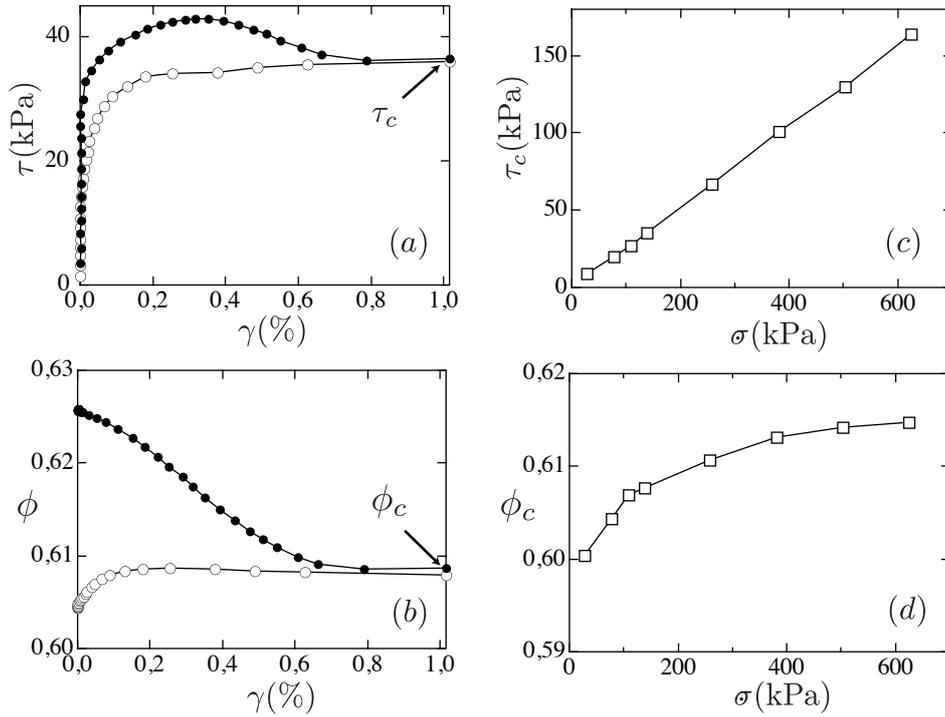


Figure 9: Mesures obtenues en cellule de cisaillement avec des billes d'acier de 1 mm (données issues de Wroth 1958). (a) Variation de la contrainte tangentielle τ en fonction de la déformation imposée $\gamma = \Delta X/Y_0$ pour une contrainte de confinement σ de 140 kPa pour un empilement initialement dense (\bullet) et initialement lâche (\circ). (b) Fraction volumique φ fonction de γ . (c) et (d) Variation de la contrainte tangentielle critique τ_c et de fraction volumique critique φ_c fonction de la contrainte normale appliquée.

Dans ces expériences on observe clairement que le comportement du matériau dépend de sa préparation initiale. Dans le cas de l'empilement lâche, le milieu se contracte au cours de la déformation et la contrainte tangentielle croît jusqu'à atteindre un plateau. Dans le cas de l'empilement dense, le milieu se dilate et la contrainte tangentielle présente un maximum avant d'atteindre le plateau. Il existe donc un fort transitoire qui semble contrôlé par la fraction volumique initiale de l'empilement. En revanche, une fois passé ce transitoire, lorsque les déformations sont de l'ordre de 60 % et au-delà, l'état initial semble oublié et les deux échantillons se retrouvent dans un même état caractérisé par une contrainte tangentielle τ_c et une fraction volumique φ_c qui ne dépendent plus de la déformation ni de la préparation. Cet état vers lequel le milieu tend aux grandes déformations est appelé *état critique*. Il dépend de la contrainte normale de confinement σ comme le montre les figures 9c et d obtenues en réalisant des expériences à différent niveaux de

contrainte et en mesurant la contrainte tangentielle critique τ_c et la fraction volumique critique φ_c en fonction de σ .

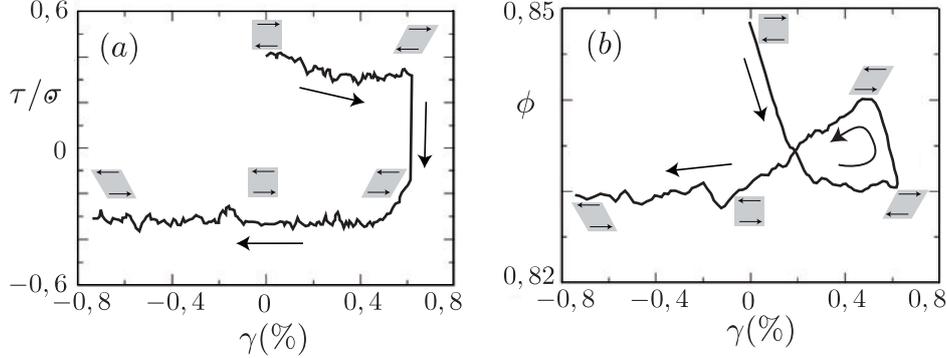


Figure 10: Simulation du renversement du sens de cisaillement dans une simulation bidimensionnelle. (a) Variation du coefficient de friction τ/σ en fonction de la déformation imposée γ qui croît de 0 à 0,7 puis décroît jusqu'à $-0,7$. (b) Variation de la fraction volumique (données d'après Radjai & Roux 2004).

Sur cette figure on observe tout d'abord une relation linéaire entre τ_c et σ . Pour déformer continuellement un milieu granulaire il faut donc lui appliquer une contrainte tangentielle proportionnelle à la contrainte normale. On retrouve dans cette configuration de la boîte de cisaillement un critère de friction pour la plasticité du milieu granulaire. La pente de la droite de la figure 9c donne le coefficient de friction. La fraction volumique critique φ_c dépend également de la pression de confinement (Fig. 9d) : elle croît aux fortes pressions mais tend vers une constante à faible contrainte. De ces observations nous pouvons conclure que la plasticité d'un milieu granulaire est essentiellement dominée par un critère de friction, mais qu'un couplage non trivial existe avec la fraction volumique des empilements. Dans la pratique, les coefficients de friction des matériaux granulaires s'étendent entre $\tan 20^\circ$ pour des billes sphériques à $\tan 40^\circ$ pour des sables de carrière très irréguliers.

Enfin, une dernière observation expérimentale vient encore ajouter à la complexité de la plasticité des milieux granulaires. Il s'agit de l'absence de réversibilité observée lorsque, à la fin d'une expérience de cisaillement pour laquelle la déformation a été suffisamment grande pour atteindre l'état critique, on inverse le sens de déformation (Fig. 10). Le système ne reste alors pas dans le même état, mais une contraction suivie d'une dilatation ainsi qu'un trou de contrainte sont transitoirement observés avant de revenir à l'état critique. Ce type d'expérience suggère donc fortement que dans l'état critique, le milieu s'est structuré dans une direction. Le changement de direction du cisaillement casse alors transitoirement la structure avant de la reformer dans l'autre direction. Des mouvements cycliques donnent lieu à des phénomènes encore plus complexes que nous n'aborderons pas dans cet ouvrage, mais qui font l'objet de nombreuses recherches notamment en lien avec la réponse d'un sol à des secousses sismiques (O'Reilly & Brown 1991).

4.3 La cellule triaxiale

Une autre configuration usuelle en mécanique de sols pour tester la résistance d'un matériau est la cellule triaxiale. Le principe consiste à imposer une contrainte normale constante σ_2 sur le pourtour d'une carotte d'échantillon, et à ensuite déformer l'échantillon en appuyant à ses extrémités. En pratique, le matériau est contenu dans une membrane flexible, le tout plongé dans une enceinte d'eau dont on contrôle le niveau de pression (Fig. 11). On augmente alors la déformation verticale $\Delta L/L = -\varepsilon_{zz}$ en déplaçant la plaque supérieure et l'on mesure simultanément la contrainte σ_1 qui

s'y applique et la variation de volume de l'échantillon. Notons que ce test est la plupart du temps effectué en immergeant le milieu granulaire dans de l'eau. Deux sortes de tests sont alors possibles. Les essais drainés, dans lesquels l'eau interstitielle est libre de sortir ou de rentrer, l'empilement granulaire pouvant alors se dilater ou se contracter. L'eau ne joue alors aucun rôle majeur dans la mécanique, et sert uniquement à mesurer précisément les variations de volume de l'empilement. Des tests non drainés sont aussi effectués où le volume de l'empilement est maintenu constant en fermant la vanne de drainage.

Par rapport au test de cisaillement plan présenté dans le paragraphe précédent, le test triaxial possède l'avantage de contrôler la direction des contraintes principales. Par contre on ne contrôle qu'indirectement les contraintes de cisaillement qui sont la source de la déformation. Dans le test triaxial, la contrainte déviatorique, qui caractérise le cisaillement, est directement reliée à la différence entre les contraintes normales $q = \sigma_1 - \sigma_2$. Plus on appuie sur l'échantillon, plus on le sollicite en cisaillement. On peut alors comparer les résultats obtenus dans le test triaxial avec les observations dans la boîte de cisaillement. La figure 12 présente les résultats obtenus à partir d'un échantillon lâche et d'un échantillon dense. On observe un comportement très similaire à la boîte de cisaillement (Fig. 9). Lorsqu'on le déforme, l'empilement dense présente un pic dans la différence de contrainte q (Fig. 12a) et s'accompagne d'une dilatation (φ diminue), tandis que l'empilement lâche se contracte et ne présente aucun pic de contrainte. Des expériences partant de plusieurs fractions volumiques initiales permettent de définir un état critique aux grandes déformations caractérisé par une contrainte critique q_c proportionnelle à la contrainte de confinement σ_2 et une fraction volumique critique φ_c (Figs.12c et d).

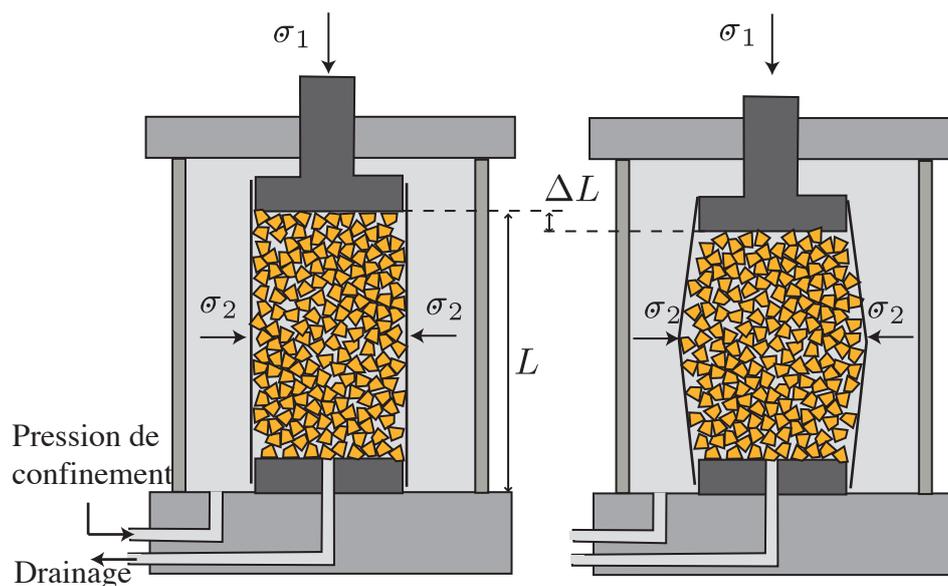


Figure 11: Principe du test triaxial.

Le premier à mettre en évidence la dilatance a été O. B. Reynolds en 1885 . Son expérience consiste en une poche élastique pleine de sable tassé, surmontée d'un tube capillaire (Fig. E15.1a). Le tout est rempli d'eau. Lorsque l'on appuie sur la poche, le niveau de l'eau dans le capillaire descend contrairement à l'intuition. L'explication est simple : en déformant la poche, on oblige les grains à se désenchevêtrer ce qui induit une dilatance comme illustrée sur la Fig. 16a. Bien que l'on appuie dessus, la poche gonfle et l'eau descend remplir les pores ainsi créés. C'est le même phénomène qui explique l'assèchement du sable autour des pieds lorsque l'on marche sur le sable mouillé d'une plage (Fig. E15.1b). Le sable mouillé d'une plage est compacté par le va-et-vient des vagues. La déformation induite par le pied produit donc une dilatation du milieu : le sable gonfle et s'assèche.

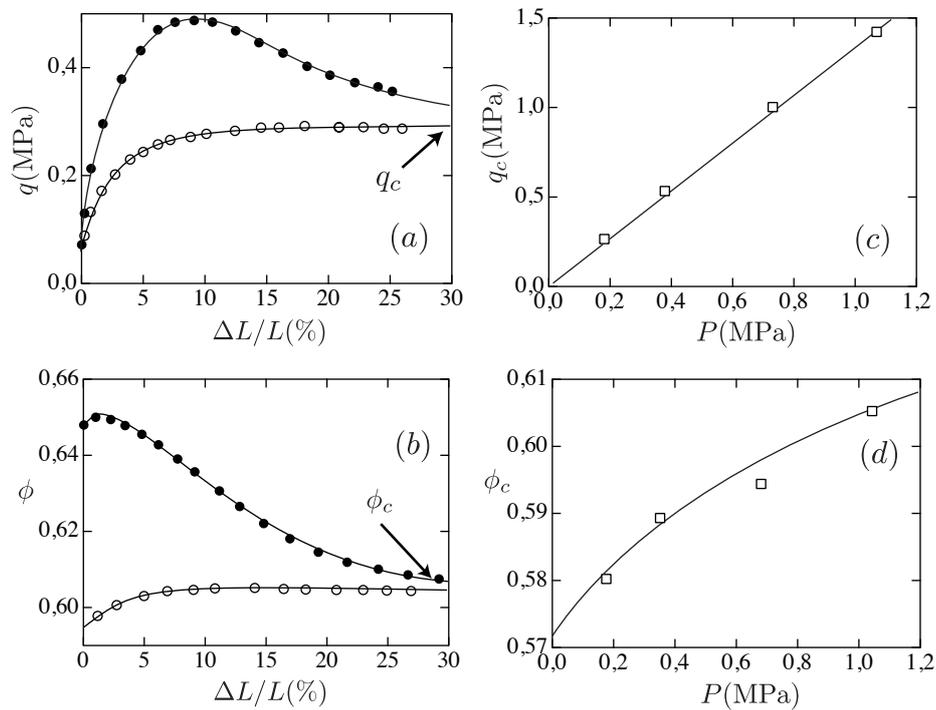


Figure 12: Résultats de tests triaxiaux obtenus sur du sable à forte pression de confinement (d'après Mohkam 1983, dont les données sont publiées dans Modaressi *et al.* 1999) pour un empilement initialement dense (●) et initialement lâche (○). (a) et (b) Évolution de la contrainte déviatorique $q = \sigma_1 - \sigma_2$ et de la fraction volumique ϕ fonction de la déformation $\Delta L/L$. (c) et (d) Évolution de la contrainte et de la fraction volumique critique fonction de la pression de confinement $P = (1/3)(\sigma_1 + 2\sigma_2)$.

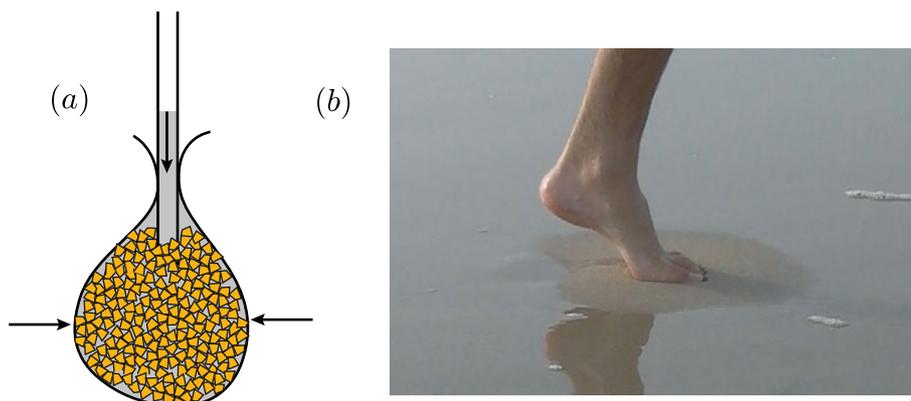


Figure 13: Exemple de phénomène induit par la dilatance des milieux granulaires. (a) Expérience de Reynolds. (b) Assèchement du sable sous le pied.

4.4 Premier niveau de description : un milieu frottant

Le premier niveau de description de la plasticité d'un milieu granulaire consiste à faire abstraction de l'influence de la fraction volumique, à oublier l'existence d'une microstructure, et à décrire le critère de plasticité d'un milieu granulaire comme un simple critère de friction. Les transitoires des courbes des figures 9a et b sont donc oubliés, et on s'intéresse uniquement à l'état critique observé aux grandes déformations. Le système du cisaillement plan est donc assimilé à un patin frottant : le milieu se déforme si la contrainte de cisaillement τ atteint un seuil qui est proportionnelle à la contrainte normale σ (Fig. 14). En dessous du seuil, le milieu est rigide, au dessus, il se déforme et la contrainte est donnée par

$$\tau = \mu\sigma, \quad (10)$$

où $\mu = \tan \delta$ est le coefficient de friction du matériau. Le comportement frottant n'est pas une

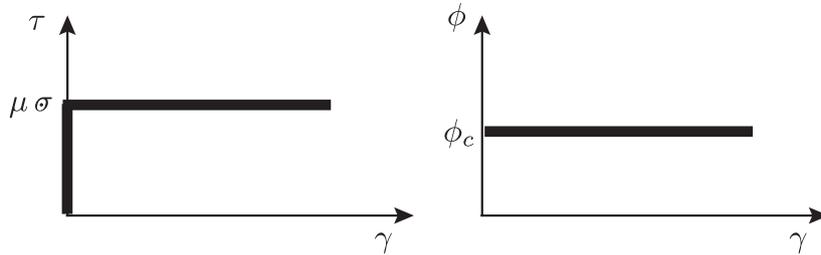


Figure 14: Modèle de Coulomb.

surprise et se comprend sur la base d'un simple argument dimensionnel. En effet, quand les niveaux de contraintes appliquées sont faibles par rapport au module d'Young des grains ou bien par rapport à leur seuil de rupture, les grains se comportent comme des grains rigides. Aucune échelle de contrainte pertinente n'existe dans le système. Dans le test de cisaillement, la seule échelle de contrainte est donc donnée par la force normale appliquée à l'échantillon, ce qui induit donc immédiatement que la contrainte tangentielle critique de plasticité doit être proportionnelle à la contrainte normale.

Le coefficient de friction $\tan \delta$ introduit dans cette loi de Coulomb est une valeur macroscopique que l'on peut mesurer, mais que nous ne savons pas à l'heure actuelle prédire à partir des propriétés des particules. La difficulté vient du fait que la friction macroscopique dans un empilement granulaire ne résulte pas uniquement du frottement entre les grains mais également d'un effet géométrique provenant de l'enchevêtrement des grains. Pour s'en convaincre, considérons la configuration simple de la figure 15a où une bille A repose entre deux billes B et C. La particule A subit une force normale N et une force tangentielle T . On se demande quelle force T il faut imposer pour faire bouger la bille A, en supposant qu'il n'y a pas de roulement mais seulement du glissement entre les billes, avec un coefficient de friction entre particules $\tan \delta_p$. Ce petit modèle peut être vu comme l'étude de la résistance d'un empilement régulier triangulaire puisqu'il suffit de reproduire la figure 15a pour créer un empilement.

Si ψ_p est l'angle que forme le plan de contact entre la bille A et la bille C avec l'horizontale, le problème est équivalent à un coin posé sur un plan incliné à un angle ψ_p (Fig. 15b). En projetant les forces N et T dans un repère lié à la surface de contact on trouve la force tangentielle au plan F_T et la force normale F_N : $F_T = T \cos \psi_p - N \sin \psi_p$ et $F_N = N \cos \psi_p + T \sin \psi_p$. Lors du glissement on a $F_T = \tan \delta_p F_N$ ce qui nous donne après quelques manipulations trigonométriques

$$T = \tan(\delta_p + \psi_p)N. \quad (11)$$

Ce calcul montre donc que la force tangentielle nécessaire pour déloger la bille de son trou est proportionnelle à la force normale, c'est à dire que l'on retrouve une loi de friction. De manière

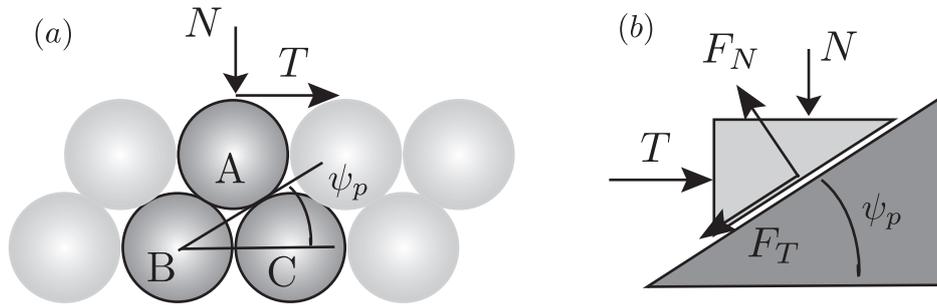


Figure 15: (a) Modèle à trois billes pour illustrer l'origine géométrique du coefficient de friction macroscopique. (b) Système équivalent en terme de blocs.

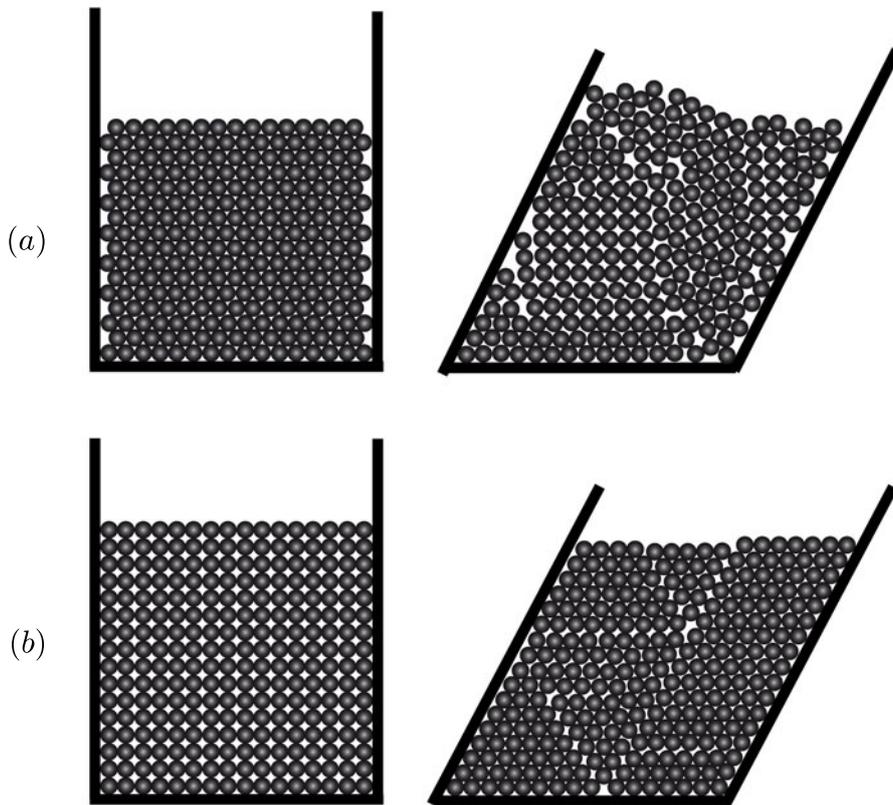


Figure 16: (a) Dilatance observée lorsque l'on cisaille un empilement bidimensionnel triangulaire. (b) Contractance observée lorsque l'on cisaille un empilement carré (dessins inspirés d'expériences de Brown & Richards 1970).

importante, le coefficient de friction que l'on obtient dépend à la fois de la friction entre grains δ_p et de la géométrie de l'empilement, encodée au travers de ψ_p . Ainsi, une friction microscopique nulle $\delta_p = 0$ n'implique pas une friction macroscopique nulle puisque pour déformer le système de la figure 15b il reste à vaincre l'enchevêtrement géométrique. Cette propriété reste vraie pour des empilements irréguliers. Un ensemble de billes non frottantes présentent un coefficient de friction faible mais non nul ($5,8^\circ$ d'après les simulations de Peyneau & Roux 2008) dont l'origine est donc

purement géométrique.

4.5 Second niveau de description : prise en compte des variations de fraction volumique

Un second niveau de description consiste à tenter de modéliser les transitoires des figures 9a et b en prenant en compte l'influence de la fraction volumique pour décrire les différences observées entre échantillons lâches et denses. Il faut alors modéliser le couplage qui peut exister entre la dilatation ou contraction observées, les variations de contraintes et la déformation du milieu. Pour comprendre qualitativement ce qui se passe dans une expérience de cisaillement plan, considérons la figure 16. Elle illustre le rôle de la fraction volumique initiale sur des empilements bidimensionnels de disques, ce qui permet de voir la structure. On observe bien qu'un empilement triangulaire qui représente l'empilement le plus dense que l'on puisse réaliser à deux dimensions se dilate, tandis que l'empilement carré qui représente l'empilement le plus lâche s'effondre et se contracte. Notons que le concept de dilatance a été initialement introduit par Reynold en 1885 (voir encadré 15). Ces variations de fraction volumique s'accompagnent de variation des contraintes nécessaires pour déformer le milieu. Un regard sur la figure 16 suffit à se persuader que déformer l'empilement carré ne demande pratiquement aucun effort, tandis qu'une contrainte bien plus importante est nécessaire pour déloger les disques dans l'empilement triangulaire. L'introduction du concept d'angle de dilatance permet de formaliser ce couplage.

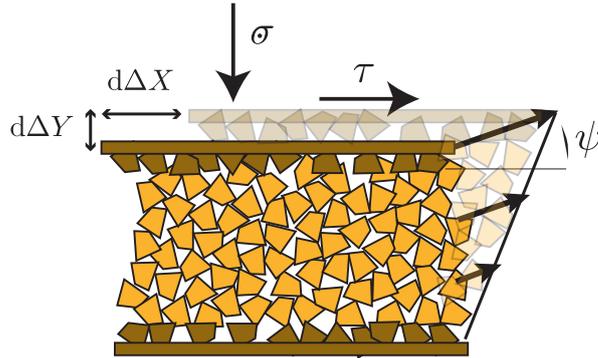


Figure 17: Illustration de l'angle de dilatance ψ en cisaillement plan.

4.5.1 Lien friction-dilatance : notion d'angle de dilatance

Afin de décrire le couplage entre les variations de fraction volumique et la contrainte de cisaillement, nous introduisons l'angle de dilatance ψ qui peut être vu comme la généralisation pour un empilement quelconque de l'angle ψ_p introduit dans le petit exercice à trois billes de la figure 15. L'angle ψ est simplement l'angle que fait la trajectoire de la plaque supérieure avec l'horizontale lorsque l'on cisaille le milieu (Fig. 17). Si l'on déplace la plaque d'un petit incrément horizontal $d\Delta X$, elle se déplace verticalement de $d\Delta Y = \tan \psi d\Delta X$. L'angle ψ mesure donc le rapport entre les déplacements relatifs vertical et horizontal entre deux couches de grains. Il peut être soit positif (dilatance), soit négatif (contractance).

Du point de vue dimensionnel, la contrainte tangentielle τ nécessaire à déformer le milieu est toujours donnée par une loi de friction, le coefficient de friction étant maintenant une fonction du nouveau paramètre ψ : $\tau = \mu(\psi)\sigma$. Intuitivement, un milieu qui doit se dilater pour se déformer ($\psi > 0$) présente un coefficient de friction plus grand qu'un milieu qui doit se dilater moins, ou même se contracter ($\psi < 0$). La fonction $\mu(\psi)$ est donc une fonction croissante de ψ , et doit être égale à $\tan \delta$, l'angle de friction dans l'état critique, quand l'angle de dilatance est nulle. Par

analogie avec le système de trois billes (eq. 11), une paramétrisation raisonnable est la suivante

$$\mu(\psi) = \tan(\delta + \psi). \quad (12)$$

Gardons à l'esprit que dans cette expression, δ est l'angle de friction macroscopique dans l'état critique et non le coefficient de friction microscopique comme dans (11). Afin de tester la pertinence de cette approche, revenons aux données expérimentales de la cellule de cisaillement (Fig. 9) obtenues sur des billes d'acier. Dans cette expérience, nous avons simultanément accès à l'évolution du coefficient de friction macroscopique $\mu(\psi) = \tau/\sigma$, ainsi qu'au déplacement verticale de la boîte supérieure ΔY en fonction du déplacement horizontale ΔX imposé. On peut donc à tout instant de la déformation calculer l'angle de dilataance donné par le rapport $\tan \psi = d\Delta Y/d\Delta X$ et tester sa contribution au coefficient de friction. Pour ce faire nous avons reporté sur la figure 18 la différence $\tau/\sigma - \tan \psi$ entre le coefficient de friction et l'angle de dilataance. Si l'équation

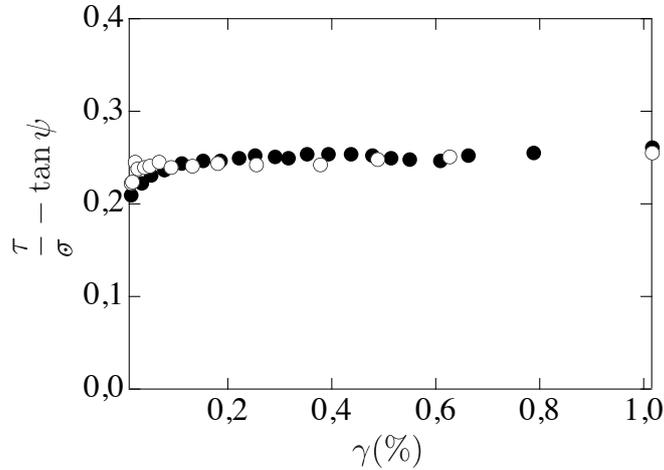


Figure 18: Différence entre le coefficient de friction et l'angle de dilataance mesurés dans une cellule de cisaillement pour un empilement initialement dense (●) et initialement lâche (○) (données de la figure 9).

(12) est valide et que l'on reste dans la limite de faibles angles de dilataance $\tan \psi \ll \tan \delta$, cette différence devrait être une constante du matériau égale à $\tan \delta$ (on a $\mu(\psi) \simeq \tan \delta + \tan \psi$). Elle ne devrait donc pas varier au long de la déformation et ne devrait pas dépendre de la préparation de l'échantillon. La figure 18 montre $\tau/\sigma - \tan \psi$ fonction de la déformation γ pour les deux séries de mesures correspondant à un empilement dense et à empilement lâche de la Fig. 9. On observe que les deux tests coïncident, et que la différence entre le coefficient de friction et l'angle de dilataance reste à peu près constante au cours de la déformation, excepté au tout début. Ces observations nous montrent donc que le pic ou le trou de contrainte observés dans le transitoire de la Fig. 9a sont principalement la contribution des variations de fraction volumique.

De ces considérations simples basées sur la définition d'un angle de dilataance, il est possible de proposer un modèle de plasticité prenant en compte les variations de fractions volumique.

4.5.2 Le modèle de milieu frottant-dilatant

L'approche consiste à enrichir le modèle de milieu frottant en introduisant l'angle de dilataance ψ pour décrire la structure interne du milieu granulaire (Wood 1990). Le matériau est caractérisé par son angle de friction critique $\tan \delta$ et sa fraction volumique critique φ_c obtenus à grandes déformations. Les considérations précédentes nous permettent de proposer le jeu d'équations suivant pour décrire l'évolution de la contrainte et de la fraction volumique dans l'expérience de cisaillement plan de la figure 8

$$\tau = \sigma \tan(\delta + \psi), \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = -\varphi \tan \psi, \quad (14)$$

$$\psi = K(\varphi - \varphi_c). \quad (15)$$

La première équation (13) discuté précédemment indique que la dilatance fournit une contribution au coefficient de friction. La seconde équation donne l'évolution de la fraction volumique avec la déformation γ imposée et provient de la définition de l'angle de dilatance. En effet, la conservation de la masse de la cellule de cisaillement de la figure 8 implique que le produit $\varphi Y = cte$ où Y est l'épaisseur de la cellule. En différenciant, on obtient donc que la variation de fraction volumique $d\varphi$ induit par un petit déplacement $d\Delta X$ de la boîte supérieure vérifie $d\varphi/\varphi = -d\Delta Y/Y_0$. Sachant que l'angle de dilatance est $\tan \psi = d\Delta Y/d\Delta X$ et que la déformation $\gamma = \Delta X/Y_0$, on trouve l'équation (14). La dernière équation (15) permet de fermer le système et a été proposée par Roux & Radjai(1998). Elle repose sur l'hypothèse raisonnable que l'angle de dilatance est proportionnel à l'écart à la fraction volumique critique. Si φ est supérieure à la fraction volumique critique φ_c , ψ est positif et le milieu se dilate. Inversement, si φ est inférieure à φ_c , le milieu se contracte. Dans cette équation, K est une constante.

En injectant l'équation (15) dans (14), on obtient une equation pour l'évolution de φ seule

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = -\varphi \tan (K(\varphi - \varphi_c)). \quad (16)$$

Si l'on démarre d'une fraction volumique différente de φ_c le milieu relaxe vers φ_c sur une déformation de l'ordre $1/K\varphi_c$. Cette relaxation s'accompagne alors d'après (13) d'une relaxation du coefficient de friction effectif vers $\tan \delta$. La figure 19 présente les prédictions du modèle pour l'évolution du coefficient de friction τ/σ et de la fraction volumique φ en fonction de la déformation γ imposée. On reproduit donc en partie les observations expérimentales présentées de la figure 9. Seul le tout début des courbes n'est pas pris en compte. Ce modèle simple montre qu' introduire la notion d'angle de dilatance est un premier pas pour décrire un peu plus finement les déformations plastiques d'un milieu granulaire.

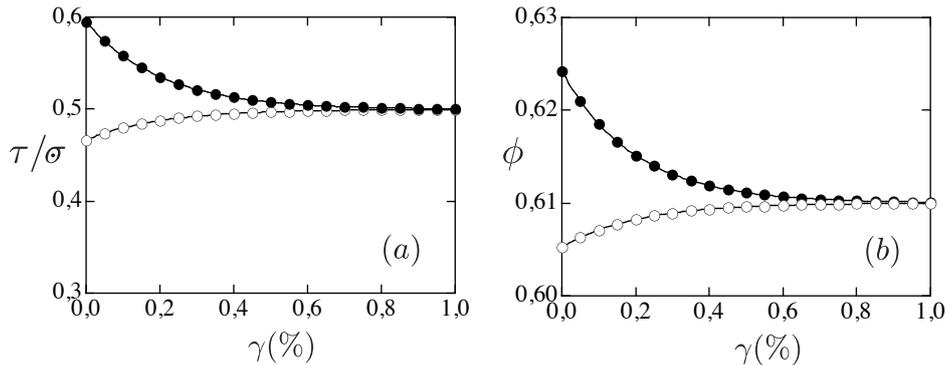


Figure 19: Prédiction du modèle frottant-dilatant (eqs. 13-15). (a) Evolution du coefficient de friction en fonction de la déformation. (b) Evolution de la fraction volumique. (●) Empilement initialement dense, (○) empilement initialement lâche.

5 Rupture et fracture

5.1 Origine microscopique de la rupture

Une rupture (ou familièrement fracture) d'un matériau est la séparation en deux ou plus pièces sous l'action d'une contrainte. La rupture fragile, au contraire de celle ductile, est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique, et donc par la propagation très rapide des fissures avec faible consommation d'énergie. Dans le cas d'un cristal, la rupture est bien nette, elle suit des plans cristallographiques, on parle de rupture par clivage.

La fissure est un défaut dans un matériau caractérisé par une discontinuité brutale, où la matière est séparée sur une certaine surface. Elle entraîne une grande concentration de contrainte à son fond. Sa propagation, sous l'effet de contraintes suffisantes, mène à la rupture. Elle est essentiellement, en pratique, le facteur limitant de la résistance mécanique des matériaux fragiles tels que les verres et les céramiques.

Les matériaux fragiles, comme le verre, rompent brutalement lorsqu'on exerce sur eux une contrainte en traction qui excède une certaine contrainte seuil. Cette contrainte seuil est très petite par rapport au module élastique du matériau. Autrement dit, une très faible déformation suffit pour le rompre. Par exemple, pour du verre, le module élastique est typiquement de $7 \cdot 10^{10}$ Pa (module d'Young) tandis qu'une contrainte de seulement $3,6 \cdot 10^9$ Pa (qui correspond à environ 5% de déformation) peut suffire pour rompre le matériau.

Pour expliquer cette fragilité importante, Griffith a eu l'idée de supposer l'existence de fissures au sein du matériau. La raison pour laquelle la présence de fissures fragilise le matériau est la suivante. Lorsqu'une contrainte est appliquée sur le matériau, il se déforme et stocke de l'énergie élastique. Une fracture existante, si elle s'ouvre davantage, soulage davantage le matériau sous tension et libère ainsi de l'énergie pour faire avancer le front d'ouverture. Au-delà d'une certaine contrainte, l'énergie ainsi libérée est suffisante, et la fracture commence à s'ouvrir davantage. Après quoi, son ouverture se poursuit de manière catastrophique, jusqu'à la rupture macroscopique du matériau. La contrainte seuil résulte donc d'un bilan entre l'énergie élastique soulagée et l'énergie interfaciale de la fracture. C'est pourquoi l'expression de la contrainte seuil obtenue par Griffith dépend à la fois du module élastique du matériau et de l'énergie interfaciale.

5.2 Contraintes autour d'une fissure

On considère une fissure de longueur $2a$ que l'on cherche à faire grandir en lui imposant une contrainte normale σ_{yy} perpendiculaire à la fissure et égale à σ , à l'infini. On parle d'ouverture en mode I, par opposition à l'ouverture d'une fissure par cisaillement dans le plan σ_{xy} (mode II) ou par cisaillement hors du plan σ_{xz} . La condition aux limites sur les lèvres de la fissure porte sur les contraintes: la composante normale de la contrainte normale s'exerçant sur la lèvre doit s'annuler. La structure laplacienne du problème conduit à une divergence des contraintes en tête de fissure. En supposant que les contraintes divergent en loi de puissance $r^{-\alpha}$ de la distance r à la tête de fissure, la contribution de celle-ci à l'énergie élastique va comme $\int \pi r \sigma^2 / E dr \propto \int r^{1-2\alpha} dr$. Pour que la contribution à l'énergie totale reste finie, mais non-nulle, il faut que la divergence soit en $r^{-1/2}$ ($\alpha = 1/2$). Plus précisément, on peut montrer que les contraintes sur l'axe de la fissure s'écrivent, pour $|x| > a$:

$$\sigma_{xx}(x, 0) = \sigma \left(-1 + \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) \quad \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma \left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right)$$

D'autre part, le déplacement des lèvres de la fissure s'écrivent, pour $|x| < a$:

$$u_x(x, 0) = -\frac{\sigma}{E}x \quad u_y(x, 0) = \pm \frac{2\sigma}{E\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Si on impose que les déformations sont planes au lieu d'imposer que les contraintes sont planes, il faut multiplier ce résultat par $1 - \nu^2$. Suite à l'application de la contrainte, la fissure plate devient une ellipse de demi-grand axe $a(1 - \sigma/E)$ et de demi-petit axe $2a\sigma/E$.

En pointe de fissure, on constate que les contraintes divergent comme $\sigma a/\sqrt{x^2 - a^2}$. Ceci ne peut être que la solution externe d'une description, qui doit être régularisée à petite échelle – fusse à l'échelle atomique. Si l'on passe par exemple à une fissure elliptique de demi petit-axe b , il existe un voisinage de la tête de fissure (une couche limite) dans laquelle la contrainte normale retourne σ_{xx} à 0 pendant que la contrainte transverse $\sigma_{yy}(x, 0)$ sature à une valeur de l'ordre de $2\sigma a/b$. La contrainte est donc amplifiée en tête de fissure d'un facteur qui va comme la racine de la courbure. Cette zone peut être le lieu de déformations plastiques (zones d'endommagement).

En mécanique, on ne considère que la partie externe de la solution, qui permet de définir le facteur d'intensité des contraintes

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = \sigma \sqrt{\pi a}$$

où les coordonnées r et θ sont définies autour de la tête de fissure. Le champ de contraintes et de déplacements se mettent sous la forme:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad u_i = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta)$$

5.3 Rupture fragile

Sous l'effet d'une contrainte σ , la déformation du matériau est de l'ordre de σ/E , où E est son module élastique. Autrement dit, une région de taille a est étirée jusqu'à une taille $(1 + \sigma/E)a$. L'énergie élastique stockée par unité de volume dans une telle région est de l'ordre de σ^2/E . En présence d'une fracture de taille a , une partie appréciable de la contrainte (et donc de l'énergie élastique) est soulagée dans une région d'épaisseur a de part et d'autre de la fracture (plus précisément, la contrainte est reportée latéralement et se concentre au voisinage de la périphérie de la fracture).

Par conséquent, l'ordre de grandeur de l'énergie élastique soulagée est donné par l'énergie qui était stockée dans la configuration non soulagée, autrement dit par le produit du volume $a^2 e$ et de la densité d'énergie σ^2/E :

$$-\frac{\sigma^2}{E} a^2 e$$

Hormis le soulagement partiel de l'énergie élastique stockée, l'ouverture de la fracture consomme une énergie γ par unité de surface. Le bilan énergétique de l'ouverture de la fracture dépend donc de sa dimension a contient donc les deux contributions :

$$E_{\text{bilan}} \simeq -\frac{\sigma^2}{E} a^2 e + \gamma a e$$

Le signe de la variation de E_{bilan} avec a indique que la fracture tend à augmenter lorsque sa taille excède une valeur de l'ordre de :

$$a_{\text{critique}} \simeq \frac{\gamma E}{\sigma^2}$$

Corrélativement, si le matériau contient dès l'origine des microfractures de taille a_{micro} , alors ces microfractures s'élargissent dès que la contrainte σ appliquée excède une contrainte seuil, dont l'ordre de grandeur est donné par :

$$\sigma_{\text{Griffith}} \simeq \sqrt{\frac{\gamma E}{a_{\text{micro}}}}$$

Ce critère fait apparaître un facteur d'intensité des contraintes critique K_c , qui ne dépend que de la nature du matériau. On l'appelle, la ténacité:

$$K_c = \sigma_{\text{Griffith}} \sqrt{\pi a_{\text{micro}}} \approx 2\gamma E$$



Figure 20: Chaussée des géants

5.4 Lave prismée

Les orgues (par analogie avec l'instrument) ou les colonnes basaltiques sont une formation géologique composée de colonnes régulières. Elle résulte de la solidification et de la contraction thermique d'une coulée basaltique peu de temps après son émission. La partie inférieure, qui se refroidit ou s'assèche plus lentement, se fracture de la surface vers la profondeur sous formes de prismes sub-verticaux à section hexagonale d'ordre décimétrique. Ces colonnes sont surmontées d'une zone de petits prismes moins réguliers pouvant s'associer en gerbes.

Le genèse des orgues a été mise en équation par Lucas Goehring et ses collègues de l'Université de Toronto. La loi d'échelle mise en évidence relie la largeur entre deux fissures aux propriétés du milieu et au flux de chaleur ou d'humidité. Elle est vérifiée avec un modèle basé sur de la fécule de maïs qui se comporte comme de la lave. La régularité des colonnes basaltiques de la Chaussée des Géants en Irlande du Nord serait ainsi due à une perte de chaleur constante.

La fracturation provient de la dilatation thermique, dont le coefficient est noté α . L'équation d'équilibre élastique du solide s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \alpha E \vec{\nabla} T$$

On écrit la diffusion de la chaleur dans la lave:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T$$

On suppose que les fractures pénètrent à une vitesse c dans la lave. Par effet de pointe, elles attirent un flux thermique, ce qui conduit à une augmentation des contraintes et donc à une propagation. Par ailleurs, les différentes fractures peuvent s'écranter et sont en compétition pour recevoir le flux thermique et l'évacuer. Dimensionnellement, le flux thermique j est de l'ordre de:

$$j \propto \frac{D \delta T}{\lambda} = c \delta T$$

où λ est la longueur d'onde et δT la différence de température entre le volume de la lave et le milieu extérieur. On en déduit immédiatement que la longueur d'onde va comme:

$$\lambda \propto \frac{D}{c}$$

Par ailleurs, la différence de température se maintient de sorte à maintenir la tête de fracture au seuil de plasticité:

$$\delta T \propto \frac{\sigma_Y}{\alpha E}$$

5.5 Formation et propagation d'un dyke. Hydrofracturation

Un dyke (ou dike) est une lame de roche magmatique qui s'est infiltrée dans une fissure de l'encaissant. De ce fait, un dyke recoupe les autres couches de roche (différence avec le sill). L'épaisseur d'un dyke peut varier de quelques centimètres à quelques dizaines de mètres tandis que son extension horizontale peut atteindre plusieurs kilomètres. Avec l'érosion, un dyke peut se retrouver isolé de son encaissant et former un mur. On modélise un dyke par un filon de magma de longueur a (disons, semi-elliptique) qui se propage à partir d'un réservoir de magma en surpression. La pression dans la roche à l'infini est notée p_∞ . La contrainte en tête de fracture est notée p et la pression dans la chambre magmatique est notée p_m . En considérant que la fissure est soumise à la contrainte perpendiculaire à l'infini, et à une pression de l'ordre de $(p + p_m)/2$, le facteur d'intensité des contraintes s'écrit:

$$K \approx \left(\frac{p + p_m}{2} - p_\infty \right) \sqrt{\pi a} = \Delta p \sqrt{\pi a}$$

Le demi-petit axe est de l'ordre de:

$$b \approx \frac{\Delta p}{E} a$$

Le volume du dyke va comme:

$$V \approx \frac{\Delta p}{E} a^2 w$$

où w est la profondeur. Dans un premier temps, le dyke se gonfle à a constant. Ce gonflement est limité par la viscosité du magma:

$$\frac{dV}{dt} \approx \frac{wb^3}{\eta} \frac{p_m - p}{a}$$

La pression évolue donc selon la loi:

$$\frac{d\Delta p}{dt} \approx \frac{1}{\eta E^2} \Delta p^3 (p_m - p) \approx \frac{1}{\eta E^2} \Delta p^3 (p_m - p_\infty - \Delta p)$$

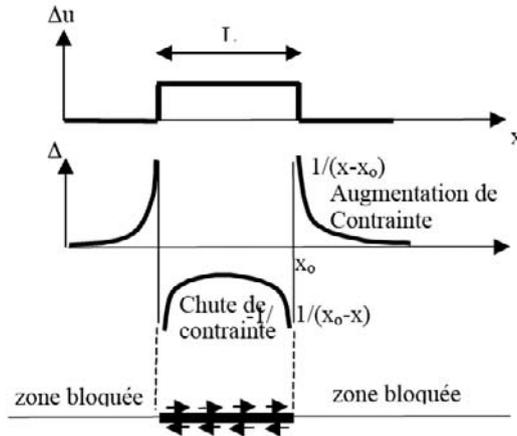
La contrainte caractéristique est donnée par E et le temps caractéristique par η/E .

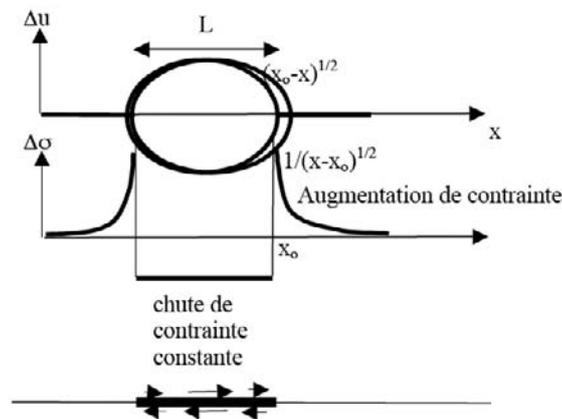
A temps long, Δp tend vers $p_m - p_\infty$. Le dyke va donc s'ouvrir et se propager si le facteur d'intensité des contraintes dépasse la ténacité, c'est à dire si:

$$p_m - p_\infty > \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}$$

Le temps d'ouverture du dyke est alors de l'ordre de:

$$\tau \approx \eta E^2 a^{3/2} K_c^{-3}$$





6 Applications aux séismes

Nous reprenons ici les notes de Paul Madariaga.

Les failles sismiques ont des dimensions finies, variant de quelques microns (micro-fissures dans les expériences de laboratoires) à des milliers de kilomètres (limites de plaques). Les séismes dits tectoniques proviennent d'ouvertures dynamique de zone de glissement par des contraintes de cisaillement (mélanges de mode II et III). Le glissement Δu entre les blocs de part et d'autre de la faille y est variable d'un point à un autre de leur surface. Sur un plan de faille, ce glissement est associé à une variation de la contrainte cisailante $\Delta\sigma$: la zone qui glisse a une contrainte qui, pour l'essentiel, diminue ($\Delta\sigma < 0$), et les zones voisines une contrainte qui augmente ($\Delta\sigma > 0$). On parle de chute de contrainte sur la faille. Le modèle le plus simple de faille plane étendue présente un glissement statique uniforme sur toute la surface mobilisée (longueur L). Ailleurs sur le plan, le glissement est nul. Ces conditions limites sur un plan infini déterminent totalement la solution du problème élastique dans tout le milieu, et donc en particulier les changements de contrainte cisailante sur le plan de faille. Ces dernières présentent une chute de contrainte sur la dislocation, et une concentration de contrainte en son voisinage. C'est le modèle de dislocation. Cette concentration de contrainte présente une singularité en inverse de la distance à l'extrémité de la dislocation ($1/x$). Il en résulte une énergie de déformation (liée à l'intégrale du produit déformation x contrainte) infinie : le modèle n'est pas acceptable physiquement. pour représenter correctement les effets en limite de faille.

Un modèle plus physique considère une chute de contrainte constante sur la fracture et une dislocation nulle à l'extérieur. C'est le modèle de fissure. (crack model). Ces conditions limites mixtes sur le plan de faille déterminent totalement la solution, qui permet ainsi de calculer la dislocation sur la fracture et les contraintes à l'extérieur. Les singularité de glissement (en $x^{1/2}$

à l'extérieur de la fracture) et de contrainte (en $x^{-1/2}$ à l'extérieur) conduisent à une énergie de déformation finie en bord de fissure. Il y a une relation entre la chute de contrainte moyenne et le glissement moyen sur la faille :

$$\Delta u \approx \frac{\Delta \sigma}{G} L$$

Dans un cas général, le glissement et la chute de contrainte sont tous deux variables sur la surface activée. Les deux fonctions ne sont pas indépendantes (une seule suffit à déterminer la solution globale) : les fluctuations de chute de contrainte à une longueur d'onde donnée sont proportionnelles au gradient de la dislocation (i.e., à la déformation) à cette longueur d'onde.

Lors de la mise en place d'un glissement sur une surface de faille, le processus d'endommagement peut ne pas parvenir à compenser la concentration de contrainte en bout de fissure. Si celle-ci est trop forte et atteint le seuil de résistance statique, le coefficient de frottement chute au niveau de sa valeur dynamique, et s'il décroît suffisamment vite il y a instabilité de glissement et rupture dynamique avec apparition de termes inertiels. Un front de rupture mobile se propage à grande vitesse, de l'ordre de 2 à 4 km/s, généralement inférieur à la vitesse des ondes S. Ce front sépare sur le plan de faille, à tout instant, une zone intacte en avant du front et une zone en glissement déjà balayée par le front.

L'analyse de la rupture des grandes failles montre une proportionnalité entre le glissement cosismique moyen Δu et la longueur L de la faille, avec un facteur de 10^{-5} à 10^{-4} . En reprenant la relation de proportionnalité entre Δu et $\Delta \sigma$, on montre que la chute de contrainte moyenne est indépendante de L , et de l'ordre de 1 à 10 MPa. On en déduit pour le moment sismique :

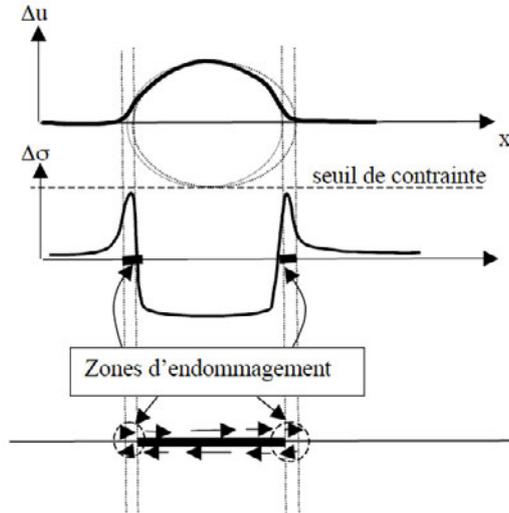
$$M_0 \approx G \Delta u S \approx \Delta \sigma L S \propto \Delta \sigma L^3$$

Le moment sismique dépend donc du cube de la longueur de faille. L'énergie sismique libérée va comme :

$$E_s \approx \Delta \sigma \Delta u S \approx \frac{(\Delta \sigma)^2}{G} L^3 \propto \frac{\Delta \sigma}{G} M_0$$

Le rapport de l'énergie sismique sur le moment sismique est donc une mesure de la chute de contrainte $\Delta \sigma / G$, dont la moyenne est indépendante de L .

Les tremblements de terre sont détectés et caractérisés par l'onde élastique libérée lors d'un glissement. Cette onde a plusieurs composantes (ondes de compression P, onde de cisaillement S, onde diffusée ou coda). La distance de l'événement est obtenue grâce à la connaissance du décalage temporel entre ondes P et S qui se propagent à des vitesses différentes. La magnitude de Richter du tremblement de terre est caractérisée par l'amplitude de l'onde détectée à 100 km de l'épicentre. On préfère maintenant utiliser le moment sismique pour caractériser l'énergie libérée. Lorsqu'on



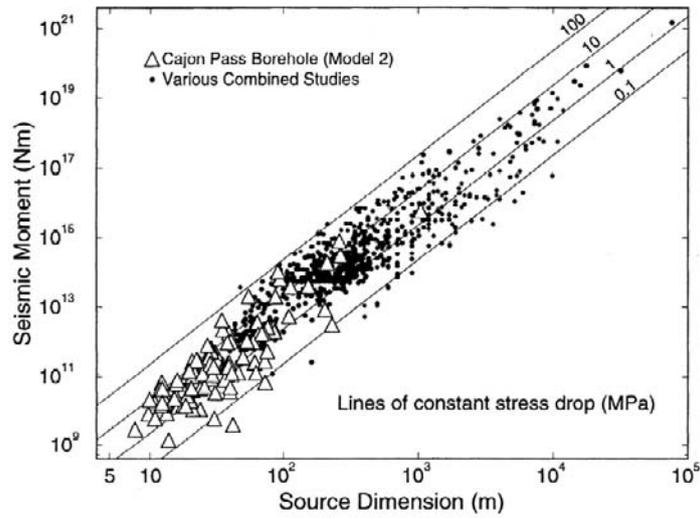
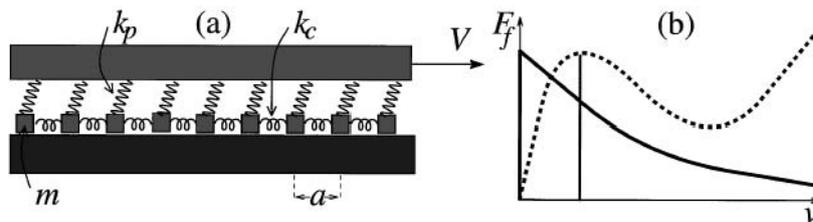


Figure 11. Seismic moment and source dimension of tectonic earthquakes. The results of this study (preferred model 2) are plotted as open triangles. The other points plotted are from the following studies, approximately in order of increasing magnitude: *Del Pezzo et al.* [1987], *Guo et al.* [1992], *Smith* [1992], *Archuleta et al.* [1982, larger events], *Mori and Frankel* [1990], *Boatwright* [1994], *Thatcher and Hanks* [1973], *Humphrey and Anderson* [1994], *Dreger and Helmberger* [1990], *Wald* [1992], and *Heaton* [1990]. Care was taken only to include studies in which a correction was made for attenuation or for which the earthquakes were large enough for attenuation effects to be ignored.

étudie un sismogramme en déplacement, on observe sur le spectre deux zones: un plateau à basse fréquence puis une décroissance spectrale proche de $1/f^2$. La fréquence de cross-over entre ces deux régimes reflète la durée de la source et varie donc comme L . L'amplitude de vibration est distribuée en loi de puissance, avec un exposant autour de 2. La distribution en énergie suit donc une loi de puissance avec un exposant autour de $3/2$. La statistique des répliques va comme t^{-1} avant et après une séisme fort. C'est l'origine de la difficulté à prévoir un tremblement de terre: l'intervalle de temps entre deux séismes n'a pas de taille typique et l'énergie de chaque séisme n'a pas non plus de taille typique! Ces lois peuvent venir à la fois des hétérogénéités intrinsèques (rupture dans les matériaux composites, les mousses, etc) et des hétérogénéités dynamiques (Plis plastiques lors du froissement d'une feuille, modèle de Burridge-Knopoff et Carlson – Langer).



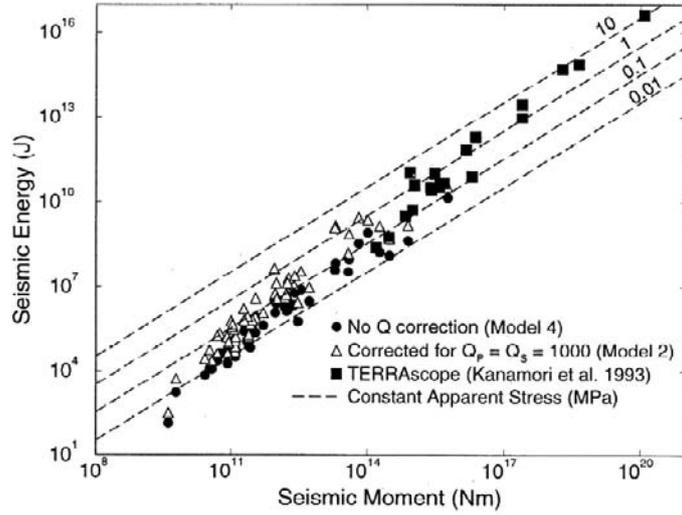


Figure 13. Seismic energy and seismic moment. The results of this study are compared with those from *Kanamori et al.* [1993] for southern California earthquakes recorded by TERRAscope. The large and small event data sets align well, but each shows an apparent underestimation of energy for the smallest events. This could result from problems with correcting for attenuation and bandwidth at the upper limit of the recording frequency range. The lines of constant apparent stress are plotted from *Wyss* [1970].

