

# Géomorphogénèse

## Chapitre 2

B. Andreotti

2010/2011

### Elasticité

#### Plissement; propagation d'ondes sismiques

#### Références bibliographiques

- "Le cours de Physique de Feynman" , tome II (Electromagnétisme 2), chapitres 38, 39 et 31.
- " Theory of Elasticity", L. D. Landau et E. M. Lifshitz.

L' élasticité est la mécanique des corps solides déformables et étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués. Ces forces et ces moments (on parlera bientôt de contraintes) qui s'exercent sur un objet fait d'un matériau donné, de forme à l'équilibre donnée et de volume donné induisent des déplacements qui se décomposent en translation, rotation et déformation (changement de forme et de volume). La mécanique du point ou du solide indéformable étudie la translation et la rotation, l'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation (Fig. 1).

### 1 Elasticité à l'échelle atomique

Pour résister aux efforts qui lui sont appliqués un matériau n'a d'autre ressource que de se déformer de manière à stocker ou à dissiper l'énergie qui lui est fournie. Dans les matériaux cristallins la déformation est associée à de légères variations des distances interatomiques, mais elles entraînent des variations considérables de l'énergie de cohésion (énergie interne). Ainsi, pour comprendre les caractéristiques mécaniques des matériaux comme leur module il faut descendre à l'échelle atomique. Deux facteurs ont un effet prépondérant sur ces propriétés. Les forces qui retiennent les atomes les uns aux autres (les liaisons atomiques). Elles agissent comme de petits ressorts qui lient un atome à ses proches voisins dans l'état solide. La manière dont les atomes sont empilés (l'empilement atomique) qui va déterminer le nombre de ressorts par unité de surface et l'angle sous lequel ils sont étirés.

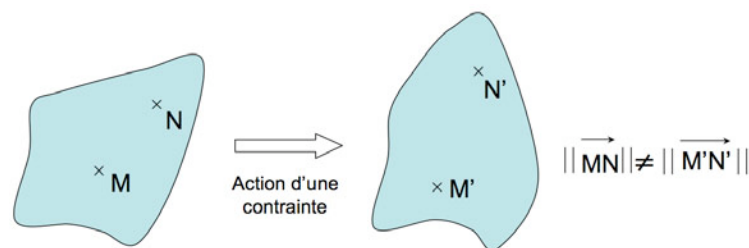


Figure 1: Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte

## 1.1 Classer les matériaux

Le physico-chimiste étudie les propriétés de la matière, métaux, alliages, verres, polymères, tissus biologiques, etc, mais ne s'occupe que rarement des matériaux correspondants. Les matériaux sont de la matière travaillée par l'homme pour fabriquer des objets. Le processus d'élaboration procure au matériau une certaine microstructure qui à son tour détermine ses propriétés chimiques, physiques, mécaniques, électriques, thermiques. Il s'agit là des propriétés intrinsèques du matériau. La synthèse des matériaux en laboratoire s'appuie sur la trilogie mise en oeuvre- structure - propriétés. Procédés de mise en oeuvre:

- Procédés de fabrication: coulée, frittage, dépôts (électrolytique, etc), mise en forme par déformation, laminage, extrusion, étirage, forgeage, emboutissage, martelage, etc
- Mise en forme par enlèvement de matière
- Usinage, rectification, découpe (chalumeau, laser, jet d'eau), électroérosion, etc
- Traitements thermiques: recuit, trempe, vieillissement, revenu, etc
- Assemblage: soudage, collage, rivetage, boulonnage, vissage, frettage,
- Traitement de surface: grenailage, rodage, trempe superficielle, revêtement par dépôt (électrolytique, phase vapeur, projection)

Propriétés mécaniques: modules et limites élastiques, ecrouissage (contrainte d'écoulement), charge à la rupture, vitesse de fluage, ductilité, allongement réparti, à rupture, taux de striction, viscosité, capacité d'amortissement, dureté, résistance (fatigue, usure, abrasion, etc).

Les matériaux sont classés en trois classes correspondant approximativement à trois types de comportement.

- Verres et céramiques: dureté et fragilité; isolants et réfractaires
- Métaux et alliages: ductilité, conducteurs et réflecteurs
- Polymères: déformabilité

Cette classification recoupe celle des matériaux en fonction de leur type de liaison chimique. Ce résultat n'est pas fortuit dans la mesure où une grande partie des propriétés physiques et en particulier des propriétés mécaniques sont conditionnées par les propriétés des liaisons chimiques.

- Liaison covalente: Bore Fibres Carbone diamant Poudres abrasives - fibres Silicium - germanium Composants électroniques Carbures - nitrures Meules, paliers, fibres réfractaires Polymères Thermodurcissables
- Liaison ionique: Alumine, silice, zircone Abrasifs, réfractaires Verres Vitres, emballages, fibres Oxydes et carbures d'uranium Industrie nucléaire
- Liaison métallique: Aluminium Alliages légers Zinc Bâtiment, fonderie Titane Aéronautique Zirconium Industrie chimique, gaines combustible nucléaire Cuivre Laitons, bronzes Or, Argent Monnaies, brasures, photographie, contacts Etain, Plomb Plomberie, soudure Tantale Réfractaire, électronique Fer, Cobalt, Nickel Aciers, fontes, superalliages
- Chaînes covalentes avec liaisons Van der Waals ou Hydrogène: Polymères Thermoplastiques Elastomères Bois, Papiers, Cartons Ciments, Bétons

A ces trois classes s'ajoute la classe des composites qui permet une grande souplesse de combinaisons de propriétés.

## 1.2 Les liaisons atomiques

Les propriétés des matériaux sont fortement corrélées au type de liaison entre atomes car il détermine l'énergie de cohésion de la matière, la force nécessaire pour écarter les atomes les uns des autres jusqu'à rupture, le coefficient de dilatation, la conductibilité électrique ou thermique, la stabilité des phases, la réactivité, etc. Le chimiste distingue deux types de liaisons : les liaisons fortes (ionique, covalente et métallique) toutes assez résistantes qui se désagrègent entre 1000 et 5000° K et les liaisons faibles ou secondaires (Van der Waals et hydrogène) relativement faibles qui fondent entre 100 et 500° K.

La cohésion des métaux et des céramiques est entièrement due à des liaisons fortes, covalentes et ioniques pour les céramiques, métalliques et covalentes pour les métaux. Ces liaisons fortes et rigides se caractérisent par des modules mécaniques élevés. Bien que beaucoup plus faibles, les liaisons secondaires n'en sont pas moins importantes. Elles sont responsables de liens entre les molécules de polymères, leur permettant d'exister à l'état solide. Sans elles, l'eau bouillirait à  $-80^{\circ}$  C et la vie sur terre n'existerait pas. Il faut cependant garder à l'esprit que de nombreux atomes sont retenus les uns aux autres par des liaisons mixtes qui combinent plusieurs sortes de liaisons élémentaires. Ainsi le carbone graphite possède des liaisons de covalence et des électrons libres lui conférant un caractère métallique et les oxydes réfractaires possèdent des liaisons ioniques partiellement covalentes. La longueur d'équilibre  $r_0$  d'une liaison résulte de la compétition entre un terme répulsif résultant de l'interpénétration des distributions de charges électroniques et un terme attractif.

- La liaison ionique est une liaison forte dont le terme attractif est d'origine Coulombienne. Elle assure la cohésion des halogénures d'alcalins comme NaCl et partiellement celle des oxydes (magnésie, alumine, etc) et des constituants du ciment (carbonates hydratés). Les électrons de chaque ion évoluent dans des domaines complexes (les orbitales) autour du noyau. En première approximation les ions peuvent être supposés sphériques et, à condition de respecter la nullité de la charge totale, la tolérance d'empilement des ions les uns autour des autres est élevée : la liaison ionique n'est pas directionnelle.
- La liaison covalente est une liaison forte très stable dont le terme attractif provient de la mise en commun d'orbitales électroniques. Dans la plupart des atomes, les électrons mis en commun occupent des régions bien définies de l'espace et leur recouvrement (orbitales à fort degré de symétrie) conduit au caractère directionnel de la liaison covalente qui détermine à son tour la manière dont s'empilent les atomes dans les cristaux. Pure, on la rencontre dans le diamant, le silicium et le germanium dont les modules sont élevés (celui du diamant est le plus grand connu). C'est la liaison dominante des céramiques au silicium et du verre (pierres, poteries, briques, verres ordinaires et constituants du ciment). Elle contribue aussi à la cohésion des métaux à température de fusion élevée (tungstène, molybdène, tantale, etc). C'est également la liaison des atomes de C des chaînes carbonées de polymères. Ces derniers comportant également des liaisons faibles, leurs modules sont généralement petits.
- La liaison métallique est une liaison forte délocalisée. C'est la liaison principale (mais pas unique) des métaux et de leurs alliages. Dans un métal les électrons d'énergie élevée ont tendance à quitter leurs atomes d'origine (qui se transforment en ions) pour former un gaz d'électrons plus ou moins libres ce qui explique la conductivité électrique élevée des métaux. De ce fait, la liaison métallique n'est pas directionnelle et les ions métalliques ont tendance à s'empiler en structures simples et denses (comme des billes rangées dans une boîte).
- Les liaisons de type Van der Waals sont des liaisons faibles dont le terme attractif entre atomes électriquement neutres est d'origine dipolaire et varie en  $r^{-6}$ . Si la symétrie des charges d'un atome existe en moyenne dans le temps (neutralité électrique), la distribution instantanée autour du noyau ne l'est pas, créant un moment dipolaire aléatoire. Ce moment induit un moment similaire sur un atome voisin et les deux dipôles ainsi formés s'attirent. Ce sont ces liaisons qui sont responsables de l'état liquide des gaz à basse température, lorsque l'agitation thermique est trop faible pour les rompre, et la glace n'existe que grâce aux liaisons

hydrogène. C'est par la formation de liaisons fortes et faibles que la matière se condense pour passer de l'état gazeux à l'état liquide ou solide. Les liaisons faibles des liquides ordinaires ont fondu ; pour cette raison ils opposent une forte résistance à la compression mais faible à la traction ou au cisaillement. Leur module de compressibilité  $K$  est grand devant celui des gaz, mais leur module de cisaillement  $G$  et leur module d'Young  $E$  sont nuls. De manière générale les modules dépendent de l'état des liaisons (solides ou fondues) et de la structure de la matière.

La façon dont les atomes sont empilés est également une donnée importante pour déterminer les propriétés mécaniques des matériaux. De nombreux matériaux (presque tous les métaux et céramiques) sont constitués d'un assemblage de petits cristaux dans lesquels les atomes sont empilés en une structure régulière répétée dans les trois dimensions. Les cristaux les plus simples peuvent être modélisés en assimilant les atomes à des sphères dures. Il s'agit là cependant d'une simplification considérable quoique commode. En simplifiant encore plus un corps pur avec une seule taille de sphères dures aux liaisons non directives aura tendance à s'organiser en une structure compacte où les sphères sont rangées sans contrainte autre que géométrique. Le Cuivre est un bon exemple de matériau répondant à ces conditions. Les caractéristiques principales de l'empilement atomique s'expriment au travers de la masse volumique du matériau qui est l'expression de la masse et du diamètre des atomes constituants, mais aussi de la densité de l'empilement dans le cristal. La plupart des métaux ont de fortes densités parce que leurs atomes sont lourds et empilés de façon compacte. Exemple de l'acier trempé : atomes de fer en structure cubique centrée ("fer  $\alpha$ ")  $\rightarrow$  chauffage  $\simeq 800^\circ$  (température d'austénitisation)  $\rightarrow$  structure cubique face centrée ("fer  $\gamma$ ") qui possède des sites interstitiels plus grands : le carbone se dissout mieux dans le fer  $\gamma$  que dans le fer  $\alpha$   $\rightarrow$  refroidissement rapide (sinon le carbone précipite). L'acier trempé est plus dur que le fer. La dureté croît avec la teneur en carbone.

Les verres minéraux sont constitués d'oxydes (comme  $\text{SiO}_2$ ) amorphes dans lesquels l'empilement n'est pas cristallin. Ainsi, la silice vitreuse, du fait des liaisons covalentes  $\text{SiO}$  reste solide bien au dessus de  $1000^\circ \text{C}$ . L'ajout de  $\text{Na}_2\text{O}$  diminue la rigidité de la structure et abaisse la température de ramollissement (à laquelle on peut travailler le verre sodique usuel des bouteilles et des vitres) aux alentours de  $700^\circ \text{C}$  en brisant une partie des liaisons covalentes. La masse volumique des polymères et de nombreuses céramique est plus faible que celle des métaux parce que les atomes constituants (C, H, O) sont plus légers et qu'ils adoptent des structures d'empilement non compact.

### 1.3 Polymères

D'après l'analyse ci-dessus, tous les matériaux véritablement à l'état solide devraient avoir des modules élastiques de l'ordre de celui déterminé ci-dessus. Or, pour la classe des matériaux polymères, les estimations basées sur la raideur des liaisons présentent un écart de plusieurs ordres de grandeur par rapport aux valeurs mesurées. Ceci provient de leur structure particulière. Les polymères sont constitués de très longues molécules. Bien que les atomes qui en constituent le squelette (généralement composé d'atomes de carbone) soient liés par des liaisons covalentes rigides, la longueur de ces chaînes les rend flexibles et, selon les conditions, ces chaînes s'arrangent :

- au hasard et non en structures périodiques tridimensionnelles (polymères amorphes)
- se replient les unes sur les autres de manière symétrique et régulière à la manière d'une antique rame de papier informatique (polymères cristallins)
- ou présentent une structure mixte contenant à la fois des zones amorphes et des zones cristallisées.

Leurs propriétés mécaniques sont conditionnées par l'indice de cristallinité, le degré de pontage entre les chaînes et la densité des liaisons faibles interchaînes de type Van der Waals. Les liaisons le long du squelette des macromolécules et les pontages occasionnels entre chaînes (liaisons covalentes très raides) ne participent que très peu à la raideur globale, sauf à très forte déformation lorsque toutes les chaînes sont complètement étirées. Ce sont les liaisons secondaires faibles (inter-chaînes

de type Van der Waals) qui contrôlent les propriétés mécaniques des polymères. Or la densité des liaisons faibles inter-chaînes étant une fonction de la température, la température de fusion du matériau doit être remplacée par la température de transition vitreuse  $T_g$  qui caractérise la transition entre un état normal basse température ( $T < T_g$ ) dans lequel les liaisons faibles sont établies et un état fondu haute température ( $T > T_g$ ) dans lequel les liaisons secondaires ont fondu. La plupart des polymères très flexibles ont partiellement fondu à l'ambiante. Au delà de  $T_g$  les polymères non pontés fondent complètement et deviennent des liquides visqueux, les polymères réticulés deviennent viscoélastiques (PVC) ou caoutchouteux (Polystyrène butadiène). Cette fusion des liaisons secondaires est la cause de leurs propriétés mécaniques particulières comme par exemple la formabilité du polyéthylène ou la grande déformabilité élastique du caoutchouc. Sous contrainte les chaînes peuvent alors facilement glisser les unes sur les autres partout où il n'y a pas de pont, ce qui explique la grande déformabilité et la faible valeur des modules élastiques des polymères à l'ambiante. Par contre, en dessous de  $T_g$  les polymères sont de véritables solides de module élastique de l'ordre du GPa. Leur module est élevé par suite de la formation de ponts Van der Waals dont la densité avoisine 1. La simple expérience qui consiste à refroidir un morceau de caoutchouc à la température de l'azote liquide permet de rendre compte de la qualité de la prédiction théorique. En effet ce dernier devient alors rigide (et cassant) et son module passe rapidement d'une valeur 1 MPa à une valeur normale d'environ 4 GPa. L'autre paramètre qui caractérise le comportement mécanique des polymères est leur degré de réticulation qui mesure la densité de ponts covalents inter-chaînes. La rigidité des polymères augmente corrélativement à l'augmentation de leur taux de réticulation pour tendre vers la limite du diamant que l'on peut considérer comme un polymère dont toutes les liaisons sont pontées. Les polymères les plus rigides ont aujourd'hui des modules comparables à celui de l'aluminium. Le module d'Young est donc une fonction croissante de la densité de ponts covalents, même pour les caoutchoucs au dessus de la température de transition vitreuse, en dessous de  $T_g$  leur module étant élevé par suite de la formation de ponts Van der Waals dont la densité avoisine 1.

Pour les matériaux tels que les élastomères et les tissus biologiques, les conformations des chaînes macromoléculaires peuvent être considérablement modifiées par les déformations quasiment sans variation des distances interatomiques et le comportement du matériau résulte de la variation de résistance au changement de conformation des macromolécules, désenchevêtrement, étirement, alignement, responsables de la haute élasticité caoutchoutique, élasticité d'origine entropique. La déformation se produit quasiment à contrainte constante et les pelotes s'étirent progressivement, la faible résistance à cet étirement provenant de l'agitation thermique qui tend à réemmêler les chaînes. A très haute déformation, le module tangent croît brutalement car ce sont les liaisons covalentes du squelette carboné de la plupart des chaînes qui sont maintenant étirées et la rupture (fragile) intervient sans accroissement notable de déformation.

## 1.4 Potentiel interatomique

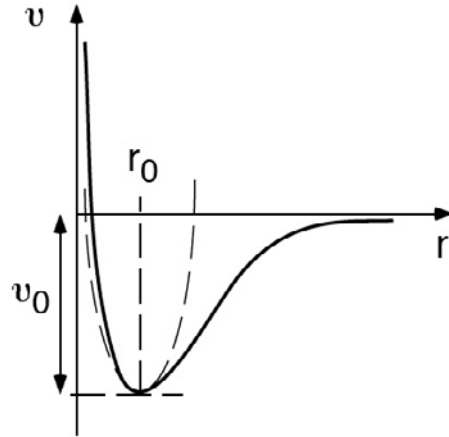
On considère un milieu formé d'atomes en interaction via un potentiel  $\Phi(r)$  comprenant une partie attractive à relativement longue distance et une partie répulsive à courte distance, traduisant la non pénétrabilité (d'origine quantique) des nuages électroniques de taille  $a \sim \text{Å}$ . Un tel potentiel présente un minimum, pour une distance inter-atomique  $r_0$ , de profondeur  $\Phi_0$ .

Le potentiel de Lennard-Jones, qui est plus précisément une énergie potentielle, est souvent utilisé pour décrire les interactions entre deux atomes en interaction de Van der Waals. Son expression en fonction de la distance  $r$  entre les deux noyaux atomiques est :

$$\Phi(r) = \Phi_0 f\left(\frac{r}{r_0}\right) = \Phi_0 \left[ \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \right]$$

$r_0$  est de l'ordre de l'Å et  $\Phi_0$  est une fraction d'eV dans un métal.

Le terme en  $r^{-6}$  est attractif et domine à grande distance (Van der Waals). Le terme répulsif en  $r^{-12}$  dominant à courte distance, est empirique: il s'agit là de rendre compte de façon ad-hoc d'un effet purement quantique, le principe d'exclusion de Pauli, qui empêche l'interpénétration mutuelle des nuages électroniques de deux atomes.



Si l'on considère un cristal dans lequel seuls les proches voisins exercent une interaction mutuelle, la connaissance du potentiel interatomique permet de calculer la force interatomique  $\frac{d\Phi}{dr}$  et la longueur au repos  $r_0$  de la liaison qui correspond au minimum de l'énergie  $\Phi$  de la liaison. Lorsque l'on étire la liaison la force croît progressivement jusqu'à la valeur maximale  $F_M$  pour une longueur  $r_M$  correspondant à la dissociation de la liaison qui se produit au point d'inflexion de la courbe  $\Phi(r)$ . La courbure du potentiel définit la raideur de la liaison. Elle augmente lorsque la liaison est de plus en plus comprimée, traduisant la résistance de plus en plus grande du matériau à la compression hydrostatique. Au contraire, lorsque la liaison est étirée, sa raideur diminue jusqu'à s'annuler au point de dissociation  $r = r_M$  où la liaison ne présente plus de résistance à la traction. Pour de faibles variations de la longueur de la liaison autour de sa valeur d'équilibre  $r = r_0$ , la force de résistance varie linéairement avec  $r - r_0$  pour tous les matériaux. On peut donc calculer la valeur de la raideur de la liaison en fonction de sa nature à partir de courbes théoriques  $\Phi(r)$ . C'est le domaine de la physique du solide et de la chimie quantique. La raideur entre molécules s'écrit:

$$k = \frac{\Phi_0}{r_0^2} f''(1)$$

## 1.5 Compression isotrope

Une quantité donnée de matière prise à la pression  $P_0$ , occupant un volume  $V_0$ , est soumise (de façon isotherme) à un incrément de pression  $\Delta P$ ; son volume devient  $V_0 + \Delta V$ . Tous les états de la matière répondent de la même façon dans la limite où la compression n'induit pas de changement d'état.

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^3 - 1$$

Energie interne:

$$Pr_0^2 = \left(\frac{kr_0\Delta L}{L}\right)$$

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq 3\frac{\Delta L}{L}$$

$$P \simeq \frac{\Phi_0}{3r_0^3} f''(1) \frac{\Delta V}{V}$$

La réponse est élastique, i.e. réversible et décrite par la donnée de la "compressibilité isotherme"  $\chi_T(P)$ :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T$$

Dans la limite des petites surpressions, on a donc :

$$\Delta V = -V_0 \chi_T(P_0) \Delta P$$

Un système n'est stable vis-à-vis de fluctuations de volume que pour  $\chi_T > 0$ .

- gaz (parfaits) :  $\chi_T = 1/P = 10^{-5} Pa^{-1}$  sous 1 atm.
- matière condensée :  $\chi_T = 10^{-9}-10^{-11} Pa^{-1}$ .

Pour les solides on utilise plutôt le "module de compression" (bulk modulus)  $K = 1/\chi_T$ .

- acier  $K = 160$  GPa
- eau  $K = 2,2$  GPa
- air  $K = 10^{-4}$  GPa

## 1.6 Traction-compression uniaxiale

Considérons la traction ou la compression d'un fil cylindrique selon son axe. La traction-compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement aux sections de ces pièces ; elle est dite uniaxiale car les côtés de la pièce ne sont pas contraints, toutes les forces sont sur un même axe.

### 1.6.1 Allongement

En prenant des pièces de différentes dimensions, on remarque que pour une force donnée :

- l'allongement  $\Delta\ell$  est proportionnel à la longueur initiale  $\ell_0$  du cylindre ; ceci se conçoit bien : si l'on met deux ressorts identiques bout-à-bout, le premier ressort transmet intégralement la force au second ressort, les deux s'allongent donc de la même quantité ; donc si avec un ressort on a un allongement  $\Delta\ell_1$ , avec deux ressorts l'allongement total est  $2\Delta\ell_1$  ;
- l'allongement  $\Delta\ell$  est inversement proportionnel à la section du cylindre ; on conçoit également aisément que si l'on met deux ressorts identiques en parallèle, chaque ressort exercera la moitié de la force de traction, l'allongement final sera donc  $\frac{1}{2}\Delta\ell$  ; si l'on double la section de la pièce, c'est comme si l'on mettait deux pièces côte-à-côte.

Si l'on veut caractériser le matériau en faisant abstraction de la forme de la pièce et de ses dimensions, on définit donc :

- l'allongement relatif ou déformation (strain en anglais), noté  $\epsilon$  est sans dimension:

$$\epsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

- la contrainte (stress en anglais), notée  $\sigma$ , est homogène à une pression ; du fait des valeurs énormes mises en jeu, on l'exprime généralement en mégapascal (MPa):

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

La loi élastique, dite loi de Hooke, s'écrit alors :

$$\sigma = E\epsilon$$

$E$  est le module de Young (Young's modulus en anglais), qui est une caractéristique du matériau.  $E$  est également homogène à une pression, du fait des valeurs très élevées qu'il prend, il est généralement exprimé en gigapascal (GPa).

Dans le cas du solide cristallin, le module d'Young s'écrit:

$$E = \frac{\Phi_0}{r_0^3} f''(1)$$

$E$  est donc de l'ordre de 100 GPa.

### 1.6.2 Élargissement

Lorsque l'on exerce une traction ou une compression, on constate que la largeur de la pièce varie également, à l'inverse de l'allongement. Pour prendre en compte cet effet, on considère un solide composé d'arrangement triangulaires de ressorts.

La variation relative de dimension est proportionnelle à l'allongement relatif  $\epsilon$ , le coefficient de proportionnalité s'appelle le coefficient de Poisson ou rapport de Poisson (Poisson's ratio en anglais) en hommage au mathématicien français Siméon Denis Poisson. Il est noté  $\nu$ , est sans unité et s'exprime, pour un cylindre, comme:

$$\frac{\Delta r}{r_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \cdot \epsilon$$

Considérons le volume de la pièce. Pour une pièce cylindrique, on a :

$$V = \ell \pi r^2$$

Pour des petites variations, on a donc :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \delta \ell / \ell_0 + 2\Delta r / r_0$$

(développement limité au premier ordre), soit :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\nu)\epsilon$$

On voit donc que si  $\nu > 0,5$  le volume diminue en traction et augmente en compression (cas exceptionnel) ; si  $\nu < 0,5$  le volume augmente en traction et diminue en compression (comportement le plus général). Pour un acier,  $\nu$  vaut environ 0,3, on est donc dans le second cas.

### 1.6.3 Quelques ordres de grandeur:

- verre, acier :  $E \simeq 100$  GPa,  $\nu \simeq 0.3$
- plexiglas :  $E \simeq 1$  GPa,  $\nu \simeq 0.4$
- caoutchouc :  $E \simeq 1-10$  MPa,  $\nu \simeq 0.5$
- hydrogel de gélatine :  $E \simeq 1-10$  kPa,  $\nu \simeq 0.5$

### 1.6.4 Energie libre

L'énergie libre élastique du fil s'identifie au travail qu'il faut fournir de façon réversible au système pour l'allonger à partir de son état à vide. A chaque étape infinitésimale  $dW = F \cdot dl = E\pi r^2(\ell - \ell_0)dl$ . Par intégration, on trouve la densité d'énergie de déformation  $\mathcal{F}/V$ , c'est-à-dire l'énergie élastique divisée par le volume de la pièce, vaut :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon V = \frac{1}{2} E \epsilon^2 V$$

## 1.7 Cisaillement simple

Si l'on applique des forces opposées (un couple) de part et d'autre d'une plaque mince constituée d'un solide élastique, il s'ensuit un déplacement relatif des deux faces du solide proportionnel à cette force. Ce type de réponse élastique à un cisaillement (simple) est propre aux solides. Un fluide ne peut soutenir une contrainte de cisaillement et s'écoule indéfiniment.

Si l'on considère un parallélepède rectangle, le cisaillement est une variation de l'angle, qui n'est plus droit. Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face. On définit de même la contrainte comme étant la force divisée par la surface sur laquelle elle s'exerce ; cette



contrainte est appelée scission (toujours exprimée en MPa) et est notée  $\tau$ . La déformation est l'écart à l'angle droit  $\gamma$ , appelé cisaillement, exprimé en radian. On a toujours une loi linéaire :

$$\tau = G\gamma$$

où  $G$  est le module de cisaillement ou module de Coulomb, généralement exprimé en GPa. Dans le cas d'un milieu isotrope, le module de cisaillement est lié au module d'Young et au coefficient de Poisson par la relation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

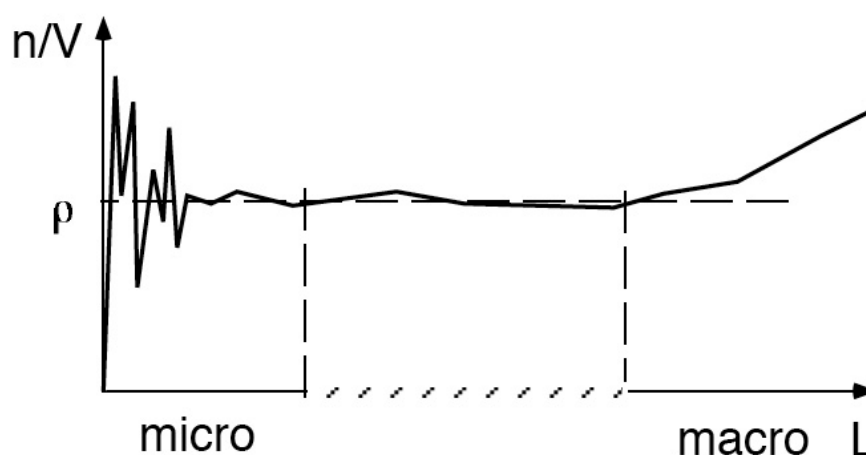
L'énergie libre emmagasinée dans la plaque cisailée est:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} G\gamma^2 V$$

## 2 Déplacements, déformations, contraintes

### 2.1 Description continue et notion de particule

A l'échelle microscopique, dans les phases fluides (gaz et liquide), le mouvement de chaque atome comporte une composante aléatoire (mouvement brownien). L'absence de repos illustre la notion de température. On redéfinit la notion de "particule" : boîte de taille  $L^3$  à laquelle on attribue une masse  $m$  et une vitesse  $\vec{v}$  définies comme des moyennes sur les  $n$  atomes contenus à un instant donné dans la boîte. Pour que ces valeurs moyennes aient un sens physique, il faut que chaque boîte contienne un nombre de particules  $n$  suffisant pour que les fluctuations au cours du temps, par exemple de  $m$  ou de  $\vec{v}$ , soient négligeables. En substance, une particule est un ensemble mésoscopique de particules, suffisamment grand pour que l'on puisse définir précisément les grandeurs thermodynamiques (pression, température, masse volumique) et mécanique (vitesse) par des moyennes d'ensemble, et suffisamment petit pour décrire les variations spatio-temporelles de ces grandeurs. Pour un fluide, une taille de particule grande devant le libre parcours moyen convient (quelques  $nm^3$  pour un liquide) sauf près du point critique où la longueur de corrélation des fluctuations diverge. Dans le cas d'un solide polycristallin, le volume représentatif doit être choisi de sorte que le comportement reflète la moyenne de l'élasticité selon les différentes orientations.



Le fondement conceptuel de la mécanique des milieux continus (hydrodynamique et élasticité) est l'hypothèse de continuité, selon laquelle les fluides peuvent être décrits par des champs continus. C'est-à-dire que l'on admet que des propriétés telles que la densité  $\rho(\vec{r}, t)$ , la pression  $P(\vec{r}, t)$ ,

la température  $T(\vec{r}, t)$ , et la vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  sont prises pour étant bien définies à des points infiniment petits, et ne changent pas d'un point à l'autre. Il faut préciser que cela suppose l'équilibre thermodynamique local à l'échelle de la particule, ce qui n'empêche pas un déséquilibre global. Lien avec le cours : "Phénomènes de transport de matière et de chaleur". La nature discrète et moléculaire d'un fluide est donc ignorée. Les problèmes pour lesquels l'hypothèse de continuité ne donne pas des réponses avec l'exactitude désirée peuvent être envisagé soit du point de vue de la mécanique statistique soit par simulation de la dynamique moléculaire.

## 2.2 Notions élémentaires sur les tenseurs

Ce paragraphe s'inspire de C. Pozrikidis, "Introduction to theoretical and computational fluid dynamics").

Les équations de la mécanique des milieux continus amènent à manipuler des tenseurs, en particulier le tenseur des contraintes et le gradient de vitesse. Notons ici quelques unes de leur propriétés essentielles. Le caractère tensoriel d'une quantité se définit par rapport à ses transformations dans un changement de repère. Considérons deux systèmes de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(y_1, y_2, y_3)$  ayant une origine commune. Les coordonnées dans les deux systèmes d'axes sont reliées par :

$$y_i = A_{ij}x_j \quad \text{et} \quad x_i = y_j A_{ji}$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice de rotation telle que son inverse soit égale à sa transposée :  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ .

Considérons maintenant une matrice 3x3  $\mathbf{T}$  dont les éléments sont des paramètres physiques dépendant des coordonnées d'espace et de temps. Lorsque les valeurs des éléments de  $\mathbf{T}$  dans le système de coordonnées  $\mathbf{y}$ , notées  $\mathbf{T}(\mathbf{y})$ , sont reliées aux valeurs de ces mêmes éléments dans le système de coordonnées  $\mathbf{x}$ , notées  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ , par les relations :

$$T_{ij}(\mathbf{y}) = A_{ik}A_{jl}T_{kl}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad T_{ij}(\mathbf{x}) = T_{kl}(\mathbf{y})A_{ki}A_{lj}$$

la matrice  $\mathbf{T}$  est un tenseur de rang deux. Une des caractéristiques importantes des tenseurs de rang deux est l'invariance de leur polynôme caractéristique  $Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$  dans un changement de repère. De ce fait les racines du polynôme caractéristique, qui sont les valeurs propres du tenseur sont également invariantes par changement de repère.

Le polynôme caractéristique peut s'exprimer en fonction des trois invariants du tenseur :

$$Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_3\lambda^2 - I_2\lambda + I_1$$

ces trois invariants ayant les expressions suivantes :

$$I_1 = Det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}([Tr(\mathbf{T})]^2 - Tr(\mathbf{T}^2))$$

$$I_3 = Tr(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

## 2.3 Rotation et tenseur des déformations

En élasticité, on définit le champ de déplacement  $u_i$  à partir de l'état de référence. Le gradient de déplacement  $\vec{G}$  obéit aux règles de transformation énoncées ci-dessus, c'est donc un tenseur cartésien de rang deux. En effet, les composantes du déplacement se transforment comme les coordonnées d'espace, soit :

$$u_i(\mathbf{y}) = A_{ij}u_j(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{y})A_{ij}$$

En utilisant la règle de dérivations successives, on a pour la composante  $G_{ij}$  du gradient :

$$G_{ij} = \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki}A_{lj} \frac{\partial u_l(\mathbf{y})}{\partial y_k}$$

Le gradient se transforme donc comme :

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = A_{ki}A_{lj}G_{kl}(\mathbf{y}).$$

Le troisième invariant, la trace du tenseur, est ici égal à la divergence du déplacement. Il caractérise le changement relatif de volume d'un élément de solide. Lorsque le solide peut être considéré comme incompressible, la trace de  $\vec{G}$  est nulle. Les parties symétrique et antisymétrique de  $\vec{G}$  sont également des tenseurs de rang deux.

Ainsi, on définit le tenseur des déformations à partir du champ de déplacement  $u_i$  par

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et le vecteur rotation comme le champ  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$ . On retiendra qu'un déplacement peut se décomposer (en chaque point) en une composante rotation solide dont le vecteur rotation est donné par la moitié du rotationnel et une composante purement élongationnelle i.e. ne faisant qu'étirer et comprimer les particules suivant deux directions orthogonales.

## 2.4 Contraintes: définition et propriétés

On définit le vecteur contrainte  $\vec{c}$  comme la force par unité d'aire exercée au voisinage d'une surface élémentaire par les particules extérieures sur les particules intérieures. Cette définition, pour être non-ambigüe, suppose qu'on oriente la surface par sa normale  $\vec{n}$  pointant par convention vers l'extérieur. La contrainte est alors non seulement fonction de la position  $\vec{r}$  mais également de la normale  $\vec{n}$  de la surface élémentaire:

$$\vec{c} = \vec{c}(\vec{r}, \vec{n})$$

En particulier, si on permute le rôle de l'intérieur et de l'extérieur, i.e. si on transforme  $\vec{n}$  en  $-\vec{n}$ , on doit avoir, en vertu du principe d'action-réaction:

$$\vec{c}(\vec{r}, -\vec{n}) = -\vec{c}(\vec{r}, \vec{n})$$

Considérons maintenant l'équilibre d'un petit tétraèdre de matière, de volume  $V$  convenablement orienté par rapport aux vecteurs de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Les trois faces "basales" ont pour normales  $-\vec{e}_1$ ,  $-\vec{e}_2$  et  $-\vec{e}_3$  tandis que la face inclinée a pour normale  $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ . En faisant intervenir les aires des facettes, l'équilibre du système s'écrit :

$$\vec{c}(\vec{n})S + \vec{c}(-\vec{e}_1)S_1 + \vec{c}(-\vec{e}_2)S_2 + \vec{c}(-\vec{e}_3)S_3 + \vec{f}_v V = \vec{0}$$

où  $\vec{f}_v$  est une éventuelle force volumique.

Deux remarques vont nous permettre de mettre en évidence une caractéristique essentielle du champ de contrainte. La taille du tétraèdre est choisie suffisamment petite devant l'échelle de variation des champs pour qu'on puisse considérer les contraintes comme uniformes sur chaque face (on ne mentionne plus  $\vec{r}$  en conséquence). Si maintenant on opère une homothétie de rapport  $\lambda < 1$  sur le tétraèdre, les forces surfaciques seront multipliées par  $\lambda^2$  tandis que le terme volumique le sera par  $\lambda^3$ . Lorsque  $\lambda$  tend vers 0, par conséquent, le terme volumique devient négligeable. On supposera que cela est vrai bien avant que les dimensions du tétraèdre deviennent d'ordre atomique, si bien qu'on reste dans le domaine continu. Les coefficients directeurs de  $\vec{n}$  s'identifient à  $n_i = S_i/S$  pour  $i = 1, 2, 3$ . En tenant compte de ces remarques et de la symétrie de  $\vec{c}(\vec{n})$  on obtient alors :

$$\vec{c}(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3) = n_1\vec{c}(\vec{e}_1) + n_2\vec{c}(\vec{e}_2) + n_3\vec{c}(\vec{e}_3)$$

quelquesoient  $(n_1, n_2, n_3)$ . On a donc montré que la relation qui lie  $\vec{n}$  et  $\vec{c}$  est linéaire. On note  $\sigma$  cette application  $\vec{n} \rightarrow \vec{c}$  est appelée tenseur des contraintes. Une fois choisie une base, on représentera ce tenseur par une matrice 3 par 3 dont chacun des 9 coefficients est un champ

scalaire  $\sigma_{ij}(\vec{r})$  ayant la dimension d'une force par unité d'aire. On peut alors écrire la relation fondamentale :

$$c_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j$$

L'expression entre parenthèses est une notation conventionnelle dite d'Einstein, supposant la sommation implicite sur les indices répétés (ici "j"). Considérons cette fois un petit cube d'arêtes de longueur  $a$  parallèles aux vecteurs d'une base orthonormée. En appliquant la relation ci-dessus aux 6 faces de normales  $\pm\vec{e}_1$ ,  $\pm\vec{e}_2$  et  $\pm\vec{e}_3$ , on peut exprimer les composantes des vecteurs contrainte sur ces faces en fonction des composantes du tenseur des contraintes. On vérifie bien que la résultante des forces de surface est bien automatiquement nulle.

L'équilibre mécanique suppose également que leur moment résultant, exprimé par exemple au centre du cube, est nul. Ce moment est :

$$\vec{M} = (\sigma_{32} - \sigma_{23})a^3\vec{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31})a^3\vec{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12})a^3\vec{e}_3$$

si bien qu'on déduit la propriété importante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

i.e. le tenseur des contraintes est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Par conséquent, il n'y a que 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes, 3 diagonales et 3 non-diagonales. Notons enfin que les termes diagonaux correspondent à des contraintes de traction/compression tandis que les termes non-diagonaux correspondent à des contraintes de cisaillement. Un cube orienté suivant les vecteurs propres du tenseur des contraintes ne subit donc que des tractions/compressions sur ses faces.

## 2.5 Pression

Un cas particulier est celui d'un champ de pression  $P$  pour lequel  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$ , le signe moins provenant de la convention  $P > 0$  en compression. Le tenseur est donc ici diagonal dans toute base orthonormée. La pression se définit à la fois, thermodynamiquement, comme l'énergie interne par unité de volume:

$$p = - \left[ \frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S,n}$$

et comme la composante isotrope des contraintes normales. Rappelons que la pression d'un gaz parfait résulte exclusivement d'effets cinétiques ( $P = \frac{1}{3}nm \langle v^2 \rangle = nkT$ ) tandis que la pression d'un solide cristallin résulte essentiellement des interactions intermoléculaires.

Si l'on mesure (à l'aide d'un capteur de force du type quartz piezo) la force normale exercée sur une petite surface  $\delta S$ , celle-ci est proportionnelle à la surface, la constante de proportionnalité étant la pression. Dans le cas de l'hydrostatique, c'est la seule composante des contraintes. La pression est un champ **scalaire** donnant lieu à des contraintes **isotropes**. Les forces de pression exercées sur une particule fluide située en  $\vec{r}$  à la date  $t$ , par le fluide environnant, sont équivalentes à une distribution volumique de force  $-\text{grad}P$ .

La résultante des forces de pression qui s'applique sur un volume de contrôle vaut :

$$\vec{F} = \oint_{\delta V_a} -P\vec{n} dS = - \int_{V_a} \vec{\text{grad}}P dV$$

(appliquer Ostrogradski à chaque composante). Lorsque l'on passe à une particule fluide, on trouve donc une force volumique égale à  $-\text{grad}P$ .

## 2.6 Contraintes élastiques

Le tenseur des contraintes se déduit de la densité volumique d'énergie libre élastique:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène isotrope,  $\mathcal{F}$  est une forme quadratique définie positive en  $\epsilon_{ij}$ . Il n'existe que deux invariants quadratiques d'un tenseur, de sorte que  $\mathcal{F}$  s'écrit:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$$

où  $G$  et  $\lambda$  sont des caractéristiques du matériau, appelés coefficients de Lamé. On en déduit immédiatement la loi de Hooke, par dérivation:

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\bar{\epsilon}_{ij} + \lambda \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij}$$

ou, en écriture tensorielle:

$$\bar{\sigma} = 2G\bar{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\bar{\epsilon})I$$

où  $I$  le tenseur unité et  $\text{tr}(\cdot)$  la trace. On constate que le cisaillement simple conduit à la contrainte de cisaillement établie précédemment.  $G$  est donc bien le module de cisaillement, aussi appelé second coefficient de Lamé.  $\lambda$  est appelé premier coefficient de Lamé. Ces deux coefficients sont homogènes à une contrainte et ont donc pour unité le Pascal (Pa). Les deux paramètres constituent un paramétrage des modules élastiques pour les matériaux homogènes isotropes, et sont donc liés aux autres modules. Selon les cas, on pourra choisir un autre paramétrage.

On considère une compression isotrope. Le tenseur des déformations s'écrit:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V} \delta_{ij}$$

Le module de compression isotrope s'exprime donc en fonction des coefficients de Lamé par :

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G$$

On peut donc réécrire la loi de Hooke en faisant apparaître le déviateur et la composante isotrope des déformations:

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G \left( \bar{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij} \right) + K \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij}$$

Considérons maintenant une traction-compression uniaxiale. Les contraintes selon la direction transverse à l'essai sont nulles. Les déformations transverses sont reliées à la déformation longitudinale par le coefficient de Poisson:  $\bar{\epsilon}_{yy} = \bar{\epsilon}_{zz} = -\nu \bar{\epsilon}_{xx}$ . Les contraintes qui en résultent s'écrivent:  $\bar{\sigma}_{xx} = E \bar{\epsilon}_{xx} = (2G + (1 - 2\nu)\lambda) \bar{\epsilon}_{xx}$  et  $\bar{\sigma}_{xx} = 0 = (-2G\nu + (1 - 2\nu)\lambda) \bar{\epsilon}_{xx}$ . D'où l'on obtient:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

Inversement, les coefficients de Lamé s'expriment en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

On peut également relier le module de compression isotrope au module d'Young et au coefficient de Poisson:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-2\nu)}$$

A noter que pour  $\nu = 0.33$  on a  $K = E$  et pour  $\nu \rightarrow 0.5$ , on a  $K \rightarrow \infty$  (incompressibilité). Les matériaux métalliques sont proches du premier cas ( $K \simeq E$  dans leur domaine élastique) alors que les élastomères s'approchent d'un comportement incompressible ( $K \gg E$ ). On peut aussi exprimer  $K$  en fonction des modules d'élasticité en traction  $E$  et en cisaillement  $G$  :

$$\frac{1}{K} = \frac{9}{E} - \frac{3}{G}$$

La loi de Hooke exprimée avec le module d'Young s'écrit:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \bar{\epsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij} \right]$$

Il est souvent utile d'utiliser la relation inversée entre contraintes et déformations:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij}$$

## 2.7 Equation de l'élasticité en cylindrique

Le tenseur des déformations s'écrit:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

## 3 Equations de la dynamique

### 3.1 Résultante des forces

Considérons un corps déformé par une force extérieure exercée en surface. Cette dernière doit s'équilibrer avec des forces internes qui s'appliquent sur la surface. → Le nouvel équilibre mécanique correspond à la compensation des forces internes et externes lorsque le solide est déformé.

Soit  $\vec{f}$  la densité de force (= force par unité de volume) qui induit la déformation. On considère un volume  $V$  du matériau élastique, fermé par une surface  $S$ . Les considérations ci-dessus peuvent se résumer à :

$$\int_V \vec{f} dV \quad \rightarrow \quad \int_S ? dS.$$

On cherche à transformer la somme des forces agissant sur le volume considéré en une intégrale de surface. Raisonnons par analogie le théorème de Gauss en électrostatique. Soit un volume  $V$  entouré par une surface  $S$ . La normale à un élément de surface  $dS$  est notée  $\vec{n}$  et pointe vers l'extérieur du corps considéré. On a  $dS \vec{n} = d\vec{S}$ . Le volume  $V$  est soumis à un champ électrique  $\vec{E}$ . D'après le théorème de Gauss :

$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

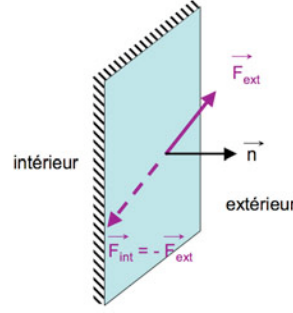


Figure 2: Résultante des forces internes et externes sur la surface.

Dans le théorème de Gauss, la grandeur intégrée sur le volume est un scalaire. On passe d'une intégrale sur  $V$  à une intégrale sur  $S$  en écrivant ce scalaire comme la divergence d'un champ de vecteurs.

Pour le cas qui nous intéresse ici, la grandeur intégrée sur le volume est un vecteur  $\vec{f}$ . Par analogie, on peut passer d'une intégrale sur  $V$  à une intégrale sur  $S$  en écrivant ce vecteur comme la divergence d'un champ de tenseur d'ordre 2. On aura :

$$\int_V \vec{f} dV = \oint_S \bar{\sigma} \cdot d\vec{S} = \oint_S \bar{\sigma} \cdot \vec{n} dS, \quad (1)$$

où  $\bar{\sigma}$  est le **tenseur des contraintes**, défini par

$$\vec{f} = \text{div}(\bar{\sigma}) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}. \quad (2)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} \\ \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} \\ \partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} + \partial_3 \sigma_{33} \end{pmatrix} \\ &= \left( \partial_k \sigma_{1k} \quad \partial_k \sigma_{2k} \quad \partial_k \sigma_{3k} \right) \\ &\rightarrow f_i = \partial_k \sigma_{ik} \end{aligned} \quad (3)$$

D'après l'équation (2),  $\bar{\sigma} \cdot \vec{n} dS$  est donc la force qui s'exerce sur la surface  $dS$  qui entoure l'élément de volume  $dV$ . Projetée sur l'axe  $Ox_i$ , l'Eq. (2) s'écrit (en utilisant toujours la notation d'Einstein) :

$$\int_V f_i dV = \oint_S \sigma_{ik} n_k dS, \quad (4)$$

Notons que  $\bar{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes *internes* : ce sont les contraintes qui s'établissent à l'intérieur du volume considéré pour équilibrer la force externe à l'équilibre.  $\oint_S \sigma_{ik} n_k dS$  est la force exercée sur le volume  $V$  de surface extérieure  $S$  par le milieu environnant (force extérieure). A l'équilibre, la force que le matériau à l'intérieur du volume  $V$  exerce sur la surface  $S$  est donc (principe de l'action et de la réaction)  $= -\oint_S \sigma_{ik} n_k dS$  (force interne).

En résumé, dans le volume le tenseur des contraintes est associé à la densité de force (force extérieure / unité de volume) :

$$f_i = \partial_k \sigma_{ik} \quad \text{ou} \quad \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma}$$

A la surface, le tenseur des contraintes est associé à la force extérieure / unité de surface :

$$F_i = \sigma_{ik} n_k \quad \text{ou} \quad \vec{F} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

### 3.2 Résultante des moments

Le moment d'une force  $\vec{F}$  s'appliquant au point  $\vec{r}$  est :

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{F} \wedge \vec{r} \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\ \vec{M} &= \begin{pmatrix} F_2 x_3 - F_3 x_2 \\ F_3 x_1 - F_1 x_3 \\ F_1 x_2 - F_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{23} \\ M_{31} \\ M_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le moment d'une force peut donc s'écrire sous la forme d'un tenseur d'ordre 2, de composantes

$$M_{ik} = F_i x_k - F_k x_i.$$

Note :  $M_{ik} = -M_{ki}$ . Le moment d'une force est donc un tenseur antisymétrique.

Le moment des forces agissant sur le volume  $V$  est donc un tenseur antisymétrique de composantes

$$M_{ik} = \int_V (f_i x_k - f_k x_i) dV. \quad (5)$$

Comme pour les forces, le moment doit pouvoir s'écrire sous la forme d'une intégrale de surface. D'après l'équation (3) et toujours avec la notation d'Einstein :

$$M_{ik} = \int_V (\partial_l \sigma_{il} x_k - \partial_l \sigma_{kl} x_i) dV$$

soit en intégrant par parties :

$$M_{ik} = \int_V \partial_l (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dV - \int_V (\sigma_{il} \partial_l x_k - \sigma_{kl} \partial_l x_i) dV.$$

or :

$$\partial_l x_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$$

où

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases}$$

$\delta_{ik}$  est le *symbole de Kronecker*. On a donc :

$$\begin{aligned} \delta_{kl} \sigma_{il} &= \sigma_{ik} \\ \delta_{il} \sigma_{kl} &= \sigma_{ki}, \end{aligned}$$

soit :

$$M_{ik} = \int_V \partial_l (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dV - \sum_l \int_V (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV.$$

Le premier terme est écrit sous la forme d'une divergence : il se transforme donc aisément en une intégrale de surface. Pour que  $M_{ik}$  se réduise à une intégrale de surface, il faut donc que le second terme s'annule, soit :

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

Le tenseur des contraintes doit donc être symétrique. On a alors :

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int_V \partial_l (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) dV \\ &= \oint_S (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) n_l dS. \end{aligned}$$



### 3.3 Equations d'équilibre

Ces équations décrivent localement le champ du vecteur déplacement  $\vec{u}$  au sein du corps déformé. L'équation d'équilibre locale d'un corps soumis à une densité volumique de force  $f_i$  s'écrit :

$$\partial_k \sigma_{ik} + f_i = 0$$

Par ailleurs, la dérivée de loi de Hooke (15) donne :

$$\begin{aligned} \partial_k \sigma_{ik} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \partial_k \varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_k (\varepsilon_{ll} \delta_{ik}) \right] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \partial_k \varepsilon_{ik} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \varepsilon_{ll} \end{aligned}$$

D'après la définition du tenseur des déformations, on a :

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i).$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement. On obtient donc :

$$\partial_k \sigma_{ik} = \frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l$$

D'où :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l + f_i = 0 \quad (6)$$

En notation vectorielle, on a (voir formulaire) :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} &= \begin{pmatrix} \partial_k^2 u_1 \\ \partial_k^2 u_2 \\ \partial_k^2 u_3 \end{pmatrix} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_l u_l \end{aligned}$$

Donc d'après (17) :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

Soit :

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) = -\frac{2(1+\nu)}{E} \vec{f} \quad (7)$$

De façon plus générale, en appelant  $\vec{f}$  la densité de forces extérieures :

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) = -\frac{2(1+\nu)}{E} \vec{f} \quad (8)$$

ou encore, en utilisant  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) = \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{u})$  (voir formulaire) :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{u}) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \vec{f} \quad (9)$$

Si la déformation du corps est causée par des forces de surface (et pas par des forces volumiques),  $\vec{f} = 0$  et l'équation d'équilibre devient :

$$(1-2\nu) \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) = \vec{0} \quad (10)$$

ou bien :

$$2(1-\nu) \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) - (1-2\nu) \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{u}) = \vec{0} \quad (11)$$

### 3.4 Equations de la dynamique

L'équation du mouvement d'un milieu élastique s'écrit :

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

En rajoutant le terme inertiel  $\rho \ddot{\vec{u}}$  dans l'équation d'équilibre, on obtient (en l'absence de forces de volume extérieures) :

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) + \vec{f} \quad (12)$$

### 3.5 Exemple: rebond d'une bille

Prenons la situation simple d'une sphère et d'un plan (limite où l'une des sphères est de dimension infinie). L'enfoncement de la sphère dans le matériau élastique augmente avec la force compressive appliquée, comme dans toute situation d'élasticité. Dans le cas du contact de Hertz, le premier résultat important est que la surface de contact augmente avec l'enfoncement. Cela est dû essentiellement à la géométrie : le contact est initialement ponctuel, et il s'élargit au fur et à mesure de l'enfoncement. En fait, à un facteur numérique près, on peut déduire la dimension du contact d'une simple construction géométrique. Ainsi, lorsque la sphère s'enfonce, son intersection avec le plan initial est un disque dont le rayon a vérifie :

$$a^2 \simeq R \delta,$$

où  $\delta$  est l'enfoncement, et  $R$  le rayon de la sphère. Le second résultat non trivial est que la relation entre la force appliquée  $F$  et l'enfoncement  $\delta$  n'est pas linéaire. Lors d'un enfoncement de  $\delta$  avec une aire de contact de rayon  $a$  (avec  $a \ll R$ ) la déformation est de l'ordre de  $\delta/a$ . La région dans laquelle la déformation du matériau est de l'ordre de  $\delta/a$  a un volume de l'ordre de  $a^3$ . L'énergie élastique par unité de volume pour une déformation  $\varepsilon$  s'écrit  $\frac{1}{2} E \varepsilon^2$ , qui est ici de l'ordre de  $E (\delta/a)^2$ . L'énergie élastique totale s'obtient par intégration. Ici, son ordre de grandeur est donné par le produit de la densité maximale d'énergie élastique de l'ordre de  $E(\delta/a)^2$  par le volume fortement déformé  $a^3$  :

$$E_{el} \simeq E \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 a^3 \simeq E a \delta^2$$

En combinant avec la relation géométrique  $a^2 \simeq R \delta$ , on obtient :

$$E_{el} \simeq E a \delta^2 = E \frac{a^5}{R^2} = E R^{1/2} \delta^{5/2}$$

La force s'obtient à partir de l'énergie  $E_{el}$  en dérivant par rapport au déplacement  $\delta$  :

$$F \simeq E R^{1/2} \delta^{3/2}$$

Inversement, l'enfoncement s'écrit :

$$\delta \simeq \left( \frac{F^2}{E^2 R} \right)^{1/3}$$

En utilisant la relation géométrique  $a^2 \simeq R \delta$ , on obtient la taille de la zone de contact :

$$a \simeq \left( \frac{F R}{E} \right)^{1/3}$$

Le calcul complet fournit :

$$F = \frac{4 a^3 E^*}{3 R}$$

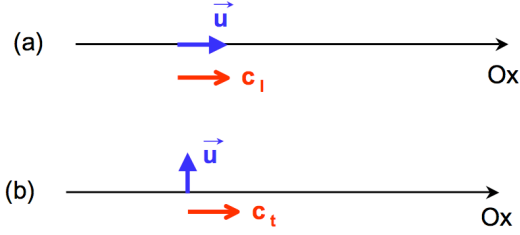


Figure 3: (a) Onde longitudinale, (b) onde transversale.

où  $E^*$  est le module d'Young  $E$  renormalisé par le coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Considérons deux particules sphériques identiques de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de vitesse  $v$  qui entrent en collision frontale. En première approximation, on peut supposer que l'énergie cinétique initiale des grains  $E_c = 2 \times (1/2)mv^2$  est convertie lors de l'impact sous forme d'énergie élastique au niveau du contact,  $E_{el} \sim 2F\delta$ , où  $F$  est la force de contact élastique et  $\delta$  l'enfoncement typique lors du choc. La durée de collision  $t_c$  est de l'ordre de  $\delta/v$ . En appliquant la loi de Hertz,  $F \sim E\sqrt{R}\delta^{3/2}$  (§??), on trouve pour cette durée de collision

$$t_c \sim \left( \frac{m^2}{RE^2v} \right)^{1/5} \sim \frac{R}{c} \left( \frac{c}{v} \right)^{1/5}, \quad (13)$$

où  $c \sim \sqrt{E/\rho_p}$  est la vitesse typique de propagation des ondes élastiques dans le solide ( $\rho_p$  est la densité de la particule). La durée de collision est essentiellement donnée par le temps de parcours des ondes élastiques dans la bille, avec une dépendance faible vis-à-vis de la vitesse de collision. Par exemple, pour un choc entre deux billes de verre (densité  $\rho_p = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ , module d'Young  $E = 10^{10} \text{ Pa}$ ) de rayon 1 mm avec une vitesse d'impact de  $1 \text{ cm.s}^{-1}$ , on a  $(c/v)^{1/5} \simeq 10$  et on trouve  $t_c \simeq 10 \mu \text{ s}$ .

Le calcul précédent suppose que la loi de Hertz, établie pour un contact statique, reste valable lors d'un choc. Cette hypothèse est en fait justifiée si la solution statique des équations de l'élasticité reste valable localement au niveau du contact, c'est-à-dire si l'on se situe dans la zone de champ proche du rayonnement des ondes élastiques. Cette condition se traduit par  $\lambda \gg a$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde typique des ondes rayonnées lors de l'impact et  $a$  la taille typique de la zone de contact. Or  $\lambda \sim ct_c$  et  $a \sim \sqrt{\delta R} \sim \sqrt{vt_c R}$ . En utilisant l'expression (13) du temps d'impact, on en déduit que la loi de Hertz reste valable pour un contact dynamique tant que

$$\frac{a}{\lambda} \sim \left( \frac{v}{c} \right)^{3/5} \ll 1, \quad (14)$$

c'est-à-dire tant que la vitesse d'impact est petite devant la vitesse de propagation des ondes élastiques (Johnson 1985).

## 4 Ondes élastiques

On considère une onde qui se propage dans un milieu élastique isotrope. On cherche ici à décrire la façon dont l'onde se propage (direction et vitesse de propagation) en fonction des caractéristiques du milieu.

## 4.1 Equation de la dynamique d'un milieu élastique

On rappelle les lois de Hooke exprimée avec le module d'Young:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right] \quad (15)$$

et

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\delta_{ik}\sigma_{ll}] \quad (16)$$

On part de l'équation d'équilibre:

$$\partial_k \sigma_{ik} + \rho g_i = 0$$

Par ailleurs, la dérivée de loi de Hooke (15) donne:

$$\begin{aligned} \partial_k \sigma_{ik} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \partial_k \varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_k (\varepsilon_{ll} \delta_{ik}) \right] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \partial_k \varepsilon_{ik} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \varepsilon_{ll} \end{aligned}$$

Or d'après la définition du tenseur des déformations  $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i)$  où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement. On obtient donc :

$$\partial_k \sigma_{ik} = \frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l$$

D'où :

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \partial_k^2 u_i + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_i \partial_l u_l + f_i = 0 \quad (17)$$

soit encore:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

et

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) = -\frac{2(1+\nu)}{E} \vec{f} \quad (18)$$

L'équation du mouvement d'un milieu élastique s'écrit :

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \vec{f} = \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

En rajoutant le terme inertiel  $\rho \ddot{\vec{u}}$  dans l'équation d'équilibre, on obtient (en l'absence de forces de volume extérieures) :

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{u}) \quad (19)$$

## 4.2 Onde élastique plane

On considère une onde élastique plane se propageant dans la direction  $x$ . Le vecteur déplacement  $\vec{u}$  est donc fonction de  $x$  et de  $t$  uniquement :  $\vec{u} = \vec{u}(x, t)$ . Donc  $\partial_y \vec{u} = \partial_z \vec{u} = \vec{0}$ . L'équation (19), projeté sur les trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  devient :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_x - \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \partial_t^2 u_x &= 0 \\ \partial_x^2 u_y - \frac{2\rho(1+\nu)}{E(1-\nu)} \partial_t^2 u_y &= 0 \\ \partial_x^2 u_z - \frac{2\rho(1+\nu)}{E(1-\nu)} \partial_t^2 u_z &= 0 \end{aligned}$$

matériau	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_L$ (m/s)	$c_T$ (m/s)
Fer	7900	5779	3089
Plomb	11400	1960	690
Cuivre	8900	4631	2280
Aluminium	2700	6404	3077
Silice fondue	2200	6745	4291
Béton	2500	5031	2689
Nylon	1150	1769	1022
Plexiglas	1200	2303	1013
Polyéthylène	900	1989	541
Caoutchouc	1500	585	82
PVC	1450	90	35

Figure 4: Valeurs des masses volumiques et de vitesses d'ondes élastiques longitudinales et transverses dans des matériaux courants.

On définit :

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (20)$$

On a donc :

$$\partial_x^2 u_x - \frac{1}{c_l^2} \partial_t^2 u_x = 0, \quad \partial_x^2 u_y - \frac{1}{c_t^2} \partial_t^2 u_y = 0, \quad \partial_x^2 u_z - \frac{1}{c_t^2} \partial_t^2 u_z = 0 \quad (21)$$

Les équations ci-dessus sont des équations d'onde qui décrivent un ébranlement qui se propage dans la direction  $Ox$ , à la vitesse  $c_l$  ou  $c_t$ .  $c_l$  est associée à un ébranlement le long de  $Ox$  (parallèle à la direction de propagation) : il s'agit d'une **onde longitudinale**.  $c_t$  est associée à un ébranlement dans la direction  $Oy$  ou  $Oz$  (perpendiculaire à la direction de propagation) : il s'agit d'une **onde transversale**.

Une onde élastique consiste donc en deux ondes qui se propagent de façon indépendante : une onde longitudinale et une onde transverse. La vitesse de propagation  $c_l$  est toujours plus grande que  $c_t$  (car  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ ) :

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} = \sqrt{\frac{1}{1-2\nu} + 1} \leq \sqrt{4/3}$$

On peut exprimer les vitesses de propagation  $c_l$  et  $c_t$  en fonction du module de compression et module de cisaillement ( $K, \mu$ ) et en fonction des coefficients de Lamé ( $\lambda, \mu$ ) :

$$c_l = \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (22)$$

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (23)$$

Des valeurs de  $c_l$  et  $c_t$  dans des matériaux courants sont donnée figure 4.

Notons que dans le cas d'un onde transverse ( $\vec{u} \perp$  direction de propagation, soit  $u_x = 0$ ), on a  $\text{div } \vec{u} = 0$ . Or on sait que  $\text{div } \vec{u} = \varepsilon_{ll} = \delta V/V$ . L'onde transverse se propage donc dans le matériau sans variation de volume. Elle est aussi appelée **onde de cisaillement** ou **onde S**.

Pour une onde longitudinale ( $\vec{u} //$  direction de propagation, soit  $u_x \neq 0, u_y = u_z = 0$ ),  $\text{div } \vec{u} \neq 0$ . La propagation de l'onde longitudinale implique donc des compressions et des dilatations dans

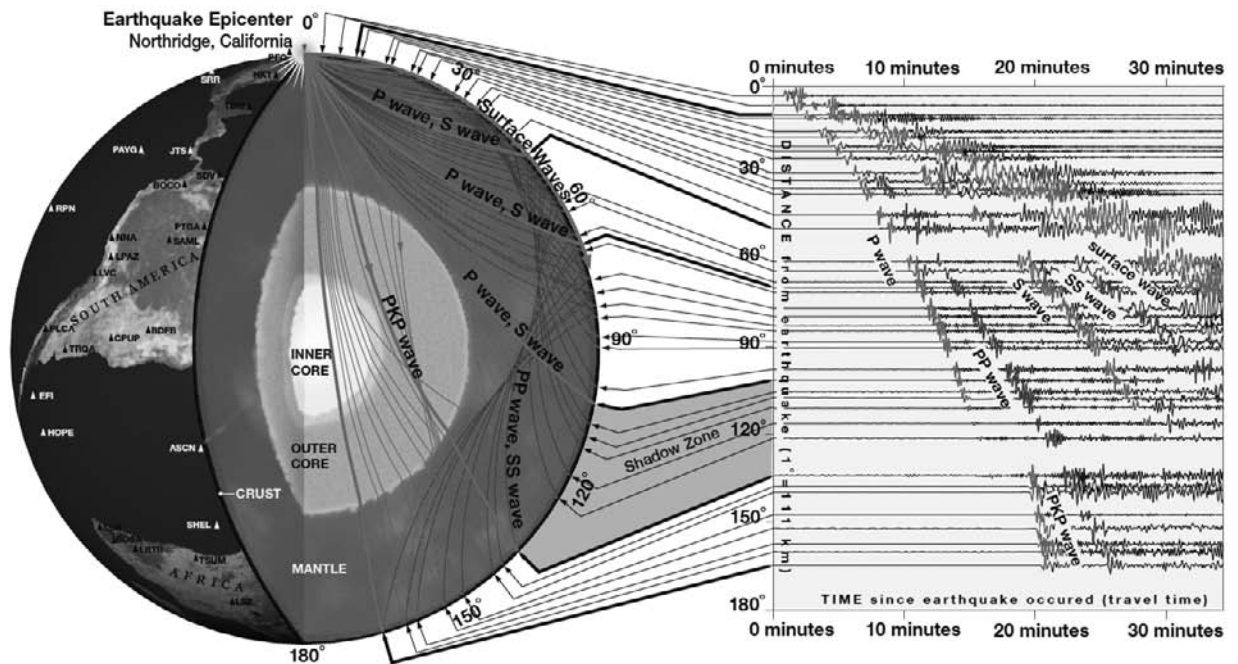


Figure 5: Structure de la Terre.

le matériau. En revanche, notons que  $\text{rot } \vec{u} = \vec{0}$ . L'onde longitudinale est également appelée **onde de compression** ou **onde P**.

Les ondes de Rayleigh sont des ondes de surface lentes, qui pénètrent sur une longueur d'onde dans le milieu. Les ondes de Love sont des ondes guidées dans une couche sédimentaire.

## 5 Elasticité des poutres. Formations de plis

On considère une poutre de longueur  $L$  le long de l'axe  $Ox$ , et de dimensions latérales petites devant  $L$ .

La poutre est fléchie comme représenté sur la figure 7a avec un rayon de courbure  $R$ . La courbure de la poutre est positive si la concavité est tournée vers les  $y \geq 0$  (ce qui est le cas sur la figure 7).

On fait les approximations suivantes :

**Flexion faible** :  $R \gg L$ ,

**Flexion pure** : la poutre n'est soumise à aucune tension ou compressions supplémentaire.

Si le rayon de courbure est faible ou que la section varie brutalement, il faudra considérer les concentrations de contrainte. Dans les cas les plus simples, notamment celui des poutres au sens élément de structure (fer, tube, ...) la courbe moyenne est droite et la section droite est constante.

### 5.1 Surface neutre

Considérons une tranche mince transversale de la poutre (figure 7b).  $R$  est en fait la courbure d'une surface située en  $y = y_0$ . On voit sur la figure que :

- pour  $y < y_0$ , la poutre est soumise à une compression,
- pour  $y > y_0$ , la poutre est soumise à une dilatation.

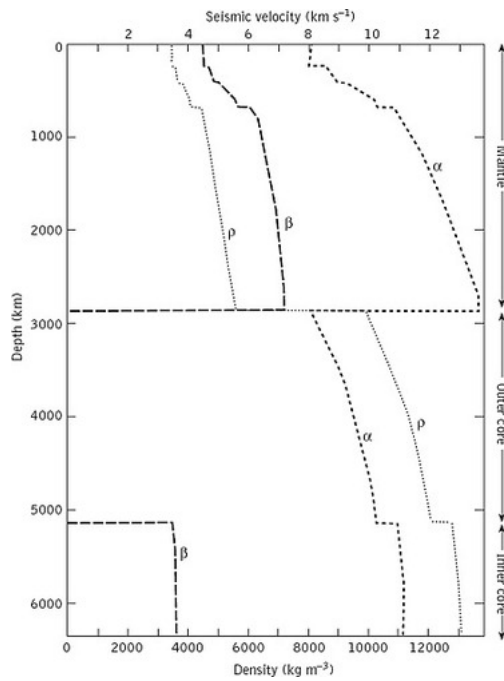


Figure 2.7-1: Seismograms recorded at a distance of 110°, showing surface waves.

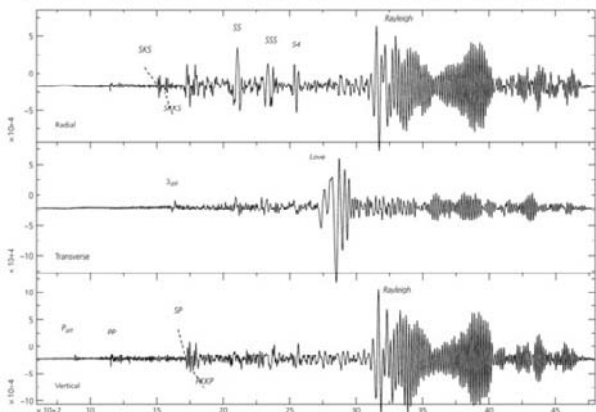


Figure 6: Vitesse des ondes et transition manteau/noyau.

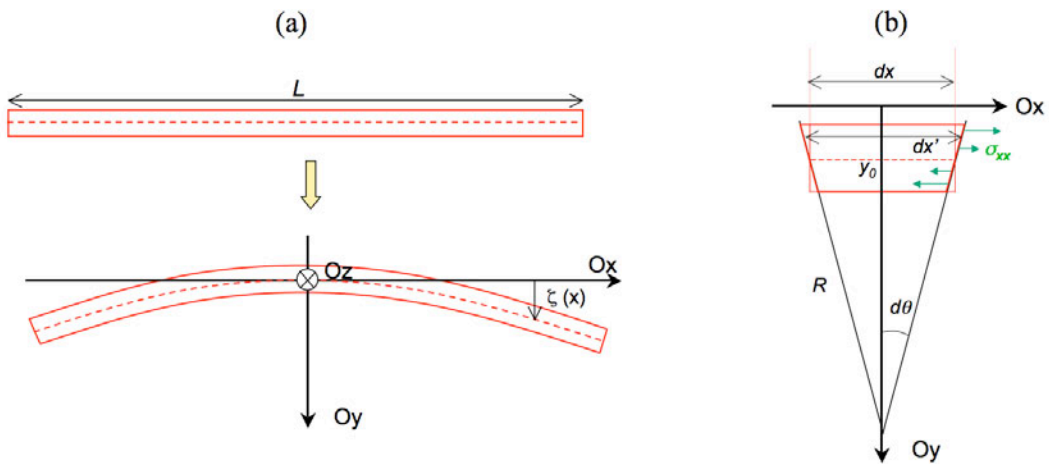


Figure 7: (a) Flexion faible d'une poutre : notations. (b) tranche mince transversale de la poutre en flexion.

Soit  $dx'$  la longueur d'un élément de poutre qui avait la longueur  $dx$  avant la déformation. On a  $dx' < dx$  pour  $y < y_0$ ,  $dx' > dx$  pour  $y > y_0$ , et  $dx' = dx$  pour  $y = y_0$ . La surface  $y = y_0$  est celle dont la longueur ne varie pas au cours de la flexion : c'est la **surface neutre** de la poutre.

Calculons la déformation d'une surface de la poutre pour laquelle  $y = \text{cte}$  avant la flexion.. Le rayon de courbure de cette surface est égal à  $R + (y - y_0)$ . On a donc :

$$\frac{dx'(y)}{R + (y - y_0)} = d\theta$$

Or en  $y = y_0$  :

$$\frac{dx'(y_0)}{R} = d\theta = \frac{dx}{R}$$

L'allongement relatif de la surface située en  $y$  est donc :

$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{y - y_0}{R}$$

La déformation correspondante est :

$$\varepsilon_{xx}(y) = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{y - y_0}{R} \quad (24)$$

## 5.2 Etat de contrainte de la poutre fléchie

La loi de Hooke associe à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  une contrainte  $\sigma_{xx}$ . Comme la déformation consiste ici en une traction de poutre, on a :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}(y) = E \frac{y - y_0}{R},$$

Comme les surfaces latérales sont libres, on a d'une part  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = 0$  à la surface libre  $\perp Oy$ , et d'autre part  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$  à la surface libre  $\perp Oz$ . Pour pouvoir s'annuler aux bords, les contraintes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$  doivent rester très petites à l'intérieur de la poutre. On les considère nulles dans un premier temps (on verra plus loin sur un exemple que le calcul prouve qu'elles sont effectivement négligeables).  $\sigma_{xx}$  est donc la seule composante non nulle du tenseur des contraintes.

## 5.3 Moment fléchissant

Comme on peut s'en convaincre en regardant la figure 7b, la contrainte  $\sigma_{xx}$  est associée à un moment qui tend à fléchir la barre, autrement dit un moment orienté selon l'axe  $Oz$ . Nous allons calculer ce moment.

Le moment infinitésimal qui s'exerce sur un élément de surface  $dy dz$  perpendiculaire à l'axe  $Ox$ , située à la hauteur  $y$ , est :

$$d\vec{m} = -(y - y_0) \vec{e}_y \wedge \sigma_{xx} \vec{e}_x dy dz = \sigma_{xx}(y - y_0) dy dz \vec{e}_z$$

On définit le **moment fléchissant** de la poutre :



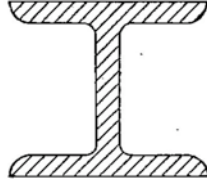


Figure 8: Forme de poutre en I utilisée dans le bâtiment.

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{M}}_f &= \int_{S_x} d\vec{m} \\
 &= \int_{S_x} \sigma_{xx}(y - y_0) dy dz \vec{e}_z \\
 &= \frac{E}{R(x)} \int_{S_x} (y - y_0)^2 dy dz \vec{e}_z \\
 \vec{\mathcal{M}}_f &= \frac{EI_z}{R} \vec{e}_z \tag{25}
 \end{aligned}$$

où  $I_z$  est le moment d'inertie de la section géométrique  $S_x$  par rapport à un axe perpendiculaire passant pas son centre de gravité :

$$I_z = \int_{S_x} (y - y_0)^2 dy dz$$

Soit  $\zeta(x)$  la déflexion de la ligne neutre de la poutre (fig. 7a). La courbure de la ligne neutre, qui est l'inverse du rayon de courbure, s'exprime :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2\zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Dans l'hypothèse de faible flexion,  $\frac{d\zeta}{dx} \ll 1$ , donc :

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

Le moment fléchissant de la poutre devient donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_f = EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} \vec{e}_z \tag{26}$$

La poutre a donc une rigidité à la flexion qui est le produit  $EI_z$ . Si on veut augmenter la rigidité de la poutre en faisant des économies de matériau, il suffit donc de placer le plus possible de matière le plus loin possible de la ligne neutre ( $y - y_0$  grand de façon à augmenter  $I_z$ ). C'est ce qui explique la forme en I des poutres métalliques utilisées dans la construction de bâtiments, comme représenté sur la figure 8.

## 5.4 Equations d'équilibre de la poutre fléchie

A l'équilibre, le moment fléchissant de la poutre doit être égal à la composante selon  $Oz$  du moment extérieur appliqué à la poutre pour la fléchir. Appelons  $M_z$  la composante  $z$  du moment extérieur  $\vec{M}$ . On a :

$$M_z \vec{e}_z = \vec{\mathcal{M}}_f$$

d'où l'équation d'équilibre des moments :

$$M_z = EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (27)$$

En général,  $\vec{M}$  est le moment d'une force extérieure  $\vec{F}$  appliquée à la poutre dans la direction  $Oy$ . Considérons une section de la poutre d'abscisse  $x$ . La force  $F_y$  appliquée sur cette section pour la fléchir est la force appliquée par la portion de poutre d'abscisse  $> x$ . A la hauteur  $(y - y_0)$ , la poutre est allongée de  $dx \vec{e}_x$ . Le moment élémentaire  $d\vec{M}$  de la force  $\vec{F}$  est

$$d\vec{M} = dx \vec{e}_x \wedge \vec{F}$$

Soit

$$dM_z = F_y dy$$

D'où

$$F_y = \frac{dM_z}{dx}$$

$F_y$  est appelé **effort tranchant**.

D'après (27) on obtient l'équation d'équilibre des forces :

$$F_y = E \frac{d}{dx} \left( I_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} \right) \quad (28)$$

L'équation (28) est bien utile lorsque la force  $F_y$  ne dépend pas de  $x$ , par exemple dans le cas d'une force ponctuelle appliquée à l'extrémité de la poutre. Dans le cas où la force extérieure dépend de  $x$  (par exemple lorsqu'on considère le poids de la tige), on peut avoir de préférence affaire à la force extérieure par unité de longueur  $f_y = \frac{dF_y}{dx}$  (qui est constante dans le cas de la pesanteur et d'une poutre de section constante). On a alors une équation d'équilibre des forces linéiques :

$$f_y = E \frac{d^2}{dx^2} \left( I_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} \right) \quad (29)$$

Les équations (27), (28) et (29) constituent les équations d'équilibre d'une poutre faiblement fléchie. Dans le cas d'une poutre de section constante, le moment d'inertie  $I_z$  ne dépend pas de  $x$  et ces équations se transforment en le système suivant :

$$M_z = EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} \quad (30)$$

$$F_y = EI_z \frac{d^3\zeta}{dx^3} \quad (31)$$

$$f_y = EI_z \frac{d^4\zeta}{dx^4} \quad (32)$$

## 5.5 Conditions aux limites

Pour trouver la forme  $\zeta(x)$  d'une poutre fléchie, on a les équations d'équilibre ci-dessus et des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont de deux types :

**poutre posée** : impose une condition sur  $\zeta$  à l'abscisse du point sur lequel repose la poutre.

**poutre encastrée** : cela impose une condition sur la position  $\zeta$  et sur la pente  $\zeta'$  de la poutre au point d'encastrement.

On peut aussi avoir des conditions aux limites sur les forces ou les moments en un point de la poutre (e. g. à son extrémité).

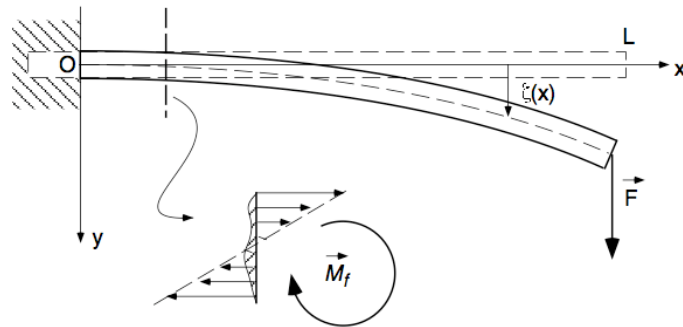


Figure 9: Poutre encastree à une extrémiteé et soumise à une force à l'autre extrémiteé.

## 5.6 Applications

### 5.6.1 Déformation d'une poutre encastree soumise à une force sur l'extrémiteé libre.

On considère une poutre de section rectangulaire :

- longueur  $L$  le long de l'axe  $Ox$ ,
- épaisseur  $h$  le long de  $Oy$ ,
- largeur  $w$  le long de  $Oz$ ,

avec  $h \ll L$ .

La poutre est encastree en  $x = 0$ . On choisit l'orientation du trièdre  $(Ox, Oy, Oz)$  de façon à ce que  $Ox$  soit parallèle à la direction d'encastrement. A l'extrémiteé de la poutre ( $x = L$ ), on applique une force  $\vec{F}$  dans la direction  $y > 0$  qui provoque la flexion de la poutre.

#### Surface neutre

Comme aucune force extérieure n'est appliquée dans la direction  $Ox$ , on doit avoir

$$\begin{aligned} \int_{S_x} \sigma_{xx} dydz &= 0 \\ w \int_0^h E \frac{y - y_0}{R} dy &= 0 \\ \int_0^h (y - y_0) dy &= 0 \\ \left[ \frac{y^2}{2} - y_0 y \right]_0^h &= 0 \\ \frac{h^2}{2} - y_0 h &= 0 \\ y_0 &= \frac{h}{2} \end{aligned}$$

La ligne neutre est située au centre de la poutre. Pour simplifier les notations, on pose  $y_0 = 0$

#### Forme de la poutre

On considère une portion de la poutre comprise entre  $O$  et l'abscisse  $x$ . Le moment de la force extérieure qui s'exerce en  $x$  sur cette portion de poutre est :

$$M_z = F(L - x)$$

D'après l'équation d'équilibre (27), on a :

$$EI_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = F(L - x)$$

Le moment d'inertie de la section  $S_x$  de poutre est :

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{S_x} y^2 dydz \\ &= w \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \\ &= w \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \\ I_z &= \frac{w h^3}{12} \end{aligned}$$

$I_z$  est indépendant de  $x$ .

L'équation d'équilibre de la poutre est donc :

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$$

Soit après deux intégrations :

$$\zeta(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B$$

Or la poutre est encastree en  $x = 0$  :

$$\zeta(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\zeta'(0) = 0 \rightarrow A = 0$$

La forme de la poutre encastree est donc :

$$\zeta(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (33)$$

### Déviatiion maximale : flèche de la poutre

La flèche  $\Delta$  de la poutre est sa déviatiion maximale, i. e. ici sa déviatiion en  $x = L$  :

$$\Delta = \zeta(L) = \frac{2FL^3}{Ewh^3}$$

La poutre peut être considérée comme une tige élastique linéaire : la flèche est proportionnelle à la force appliquée :

$$F = k\Delta$$

où

$$k = \frac{Ew}{2} \left( \frac{h}{L} \right)^3$$

est la constante de raideur de la poutre élastique fléchiie. Plus le rapport d'aspect  $h/L$  est petit, moins la poutre présente de rigidité à la flexion.

## Remarques

a) Déformation maximale :

La déformation de la poutre en  $(x, y)$  est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{y}{R} \\ &= y \frac{d^2\zeta}{dy^2} \\ &= y \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)\end{aligned}$$

$\varepsilon_{xx}$  est maximal en  $x = 0$  et  $y = h/2$  :

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{xx})_{max} &= \frac{6FeL}{Ewh^3} \\ &= \frac{e}{2L} \frac{\Delta}{L} \\ (\varepsilon_{xx})_{max} &\ll \frac{\Delta}{L}\end{aligned}$$

b) Etat de contrainte de la poutre :

$\sigma_{xx}$  est maximale lorsque  $\varepsilon_{xx}$  est maximal, soit en  $x = 0$  et  $y = \pm h/2$ .

$$(\sigma_{xx})_{max} = \frac{6FL}{wh^2}$$

Il existe aussi une contrainte tangentielle  $\sigma_{xy}$  liée à la force extérieure  $\vec{F}$  appliquée dans la direction  $Oy$  sur la surface de la poutre de normale  $\vec{e}_x$  :

$$\sigma_{xy} = \frac{F}{wh}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_{xx})_{max}} &= \frac{F}{wh} \frac{wh^2}{6FL} \\ &= \frac{h}{6L} \\ \frac{\sigma_{xy}}{(\sigma_{xx})_{max}} &\ll 1\end{aligned}$$

On voit bien que, dans le cas d'une poutre allongée, seule la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  doit être prise en compte, comme annoncé en début de chapitre.

### 5.6.2 Déformation d'une poutre encastree soumise à son propre poids.

On considère la poutre rectangulaire (longueur  $L$ , largeur  $w$ , épaisseur  $h$ ) encastree en  $x = 0$ , la direction d'encastrement étant selon l'axe  $Ox$ . La poutre est libre à son extrémité, mais est fléchie sous son propre poids.

La force extérieure totale qui exercée en  $x$  sur la portion de poutre comprise entre  $O$  et l'abscisse  $x$  par la portion de poutre comprise entre les abscisses  $x$  et  $L$  est :

$$F_y(x) = \rho g w h (L - x)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la poutre et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. On peut alors utiliser l'équation d'équilibre (28). Mais on peut aussi aller plus vite en considérant que la poutre

est soumise à une force linéique constante  $f_y = \rho g w h$  et utiliser l'équation d'équilibre (29). On obtient :

$$\begin{aligned}\rho g w h &= E \frac{d^2}{dx^2} \left( I_z \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right) \\ &= \frac{E w h^3}{12} \frac{d^4 \zeta}{dx^4}\end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} = \frac{12 \rho g}{E h^2}$$

Après quatre intégrations :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{E h^2} \frac{x^4}{2} + A x^3 + B x^2 + C x + D$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes.

Conditions aux limites :

- Poutre encastree :  $\zeta(0) = (0)$  et  $\zeta'(0) = (0) \rightarrow C = D = 0$

- Extrémité libre en  $x = L$  :

a) Force nulle en  $x = L$

$$F_y(L) = 0$$

$$\zeta'''(L) = 0$$

$$A = -\frac{\rho g}{E h^2} 2L$$

Donc :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{2 E h^2} (x^4 - 4 L x^3) + B x^2$$

a) Moment nul en  $x = L$

$$M_y(L) = 0$$

$$\zeta''(L) = 0$$

$$B = \frac{3 \rho g}{E h^2} L^2$$

Donc :

$$\zeta(x) = \frac{\rho g}{2 E h^2} (x^4 - 4 L x^3 + 6 L^2 x^2) \quad (34)$$

La flèche de la poutre est :

$$\Delta = \zeta(L) = \frac{3 \rho g L^4}{2 E h^2}$$

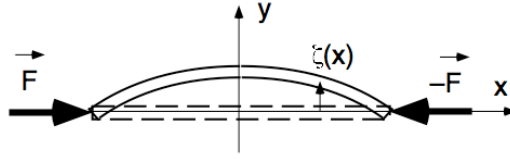


Figure 10: Géométrie de flambage d'une poutre chargée axialement à ses extrémités libres.

## 5.7 Flambage d'une poutre (*buckling*)

On considère une poutre d'axe  $Ox$  chargée axialement à ses deux extrémités par deux forces  $\pm F\vec{e}_x$ . Bien que la force ne soit pas dans la direction  $Oy$ , l'expérience que l'on peut faire en comprimant une baguette fine prouve que si la compression est suffisamment forte, la baguette fléchit.

On suppose la poutre fléchie et on note  $\zeta(x)$  sa déflexion à l'abscisse  $x$  (figure 10).

A l'abscisse  $x$ , le moment de la force extérieur  $\vec{F}$  est :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= [-\zeta(x)]\vec{e}_y \wedge [-F\vec{e}_x] \\ &= -\zeta(x)F\vec{e}_z \\ M_z &= -\zeta(x)F\end{aligned}$$

L'équation d'équilibre (27) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}EI_z \frac{d^2\zeta}{dx^2} &= -\zeta(z)F \\ \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{F}{EI_z} \zeta(z) &= 0\end{aligned}$$

Si la section de la poutre est constante, alors  $I_z$  ne dépend pas de  $x$  et l'équation ci-dessus admet des solutions de la forme :

$$\zeta(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

où

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI_z}}$$

Compte tenu des conditions aux limites  $\zeta(\pm L/2) = 0$ ,  $A$  et  $B$  doivent être solutions du système :

$$\begin{cases} A \cos(\alpha L/2) + B \sin(\alpha L/2) = 0 \\ A \cos(\alpha L/2) - B \sin(\alpha L/2) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système s'annule pour

$$\sin(\alpha L) = 0$$

Soit

$$\alpha = \frac{p\pi}{L} \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*$$

D'où :

$$F = p^2 \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (35)$$

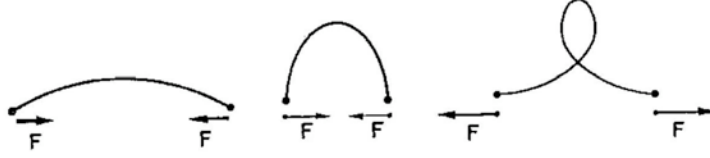


Figure 11: Formes d'un tige ayant flambé, pour  $F \geq F_c$  (grandes déformations).

Comme  $p \geq 1$ , une solution fléchie ne peut exister que si  $F \geq F_c$  avec

$$F_c = \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (36)$$

$F_c$  est le seuil de flambage.

$$F_c = \pi^2 \frac{Ewh^3}{12L^2} = \pi^2 \frac{Ewh}{12} \left( \frac{h}{L} \right)^2$$

La contrainte critique de flambage est donc :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{wh} = E \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{h}{L} \right)^2.$$

Plus le rapport d'aspect  $h/L$  est petit, plus le seuil de flambage est bas.

Note : il n'existe pas de solution correspondant à  $p \geq 2$  dans l'équation (35) car l'analyse ci-dessus ne s'applique qu'aux petites déformations. Si la force extérieure  $F \geq F_c$  ( $F_c$  correspondant à  $p = 1$ ) augmente, la déformation augmente elle-aussi. La tige prend en réalité les formes représentées fig. 11.

## 5.8 Formation de plis dans la roche ductile

La partie de l'Océan Indien située au sud de l'Inde est le site le plus évident de déformation intraocéanique de grande échelle. Cette lithosphère d'environ 60 Ma subit une déformation active distribuée sur plus de 1000 ? 1000 km<sup>2</sup>. Des plis d'axe Est-Ouest et de longueur d'onde ? 200 km y sont observés, accompagnant une sismicité profonde et de nombreuses failles actives en surface. La déformation par flambage est aussi évoquée pour expliquer les structures observées dans d'autres lithosphères océaniques: des plis sont repérés à proximité de la Ride de Mussau en bordure orientale de la plaque Caroline.

On considère une couche mince de matériau élastique sur un substrat élastique semi-infini. La longueur, notée  $L$ , est grande devant la largeur  $b$ , qui est grande devant l'épaisseur  $h$ . On impose un déplacement  $\Delta$  entre les extrémité de cette couche. On suppose que l'énergie de compression est beaucoup plus grande que l'énergie de courbure. En vertu de l'analyse précédente, l'énergie de courbure va comme:

$$F_\kappa = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dx dy dz \approx \frac{Lbh^3}{24} E \kappa^2$$

et la courbure  $\kappa$  va comme  $A/\lambda^2$ . Par ailleurs, l'amplitude  $A$  de déformation de la couche élastique est telle que la longueur totale soit conservée. La déformation à l'interface avec la partie inférieure va donc comme:

$$A \approx \lambda \left( \frac{\Delta}{L} \right)^{1/2}$$

Au final, l'énergie de courbure varie comme:

$$F_\kappa \approx E \frac{h^3}{\lambda^2} b \Delta$$



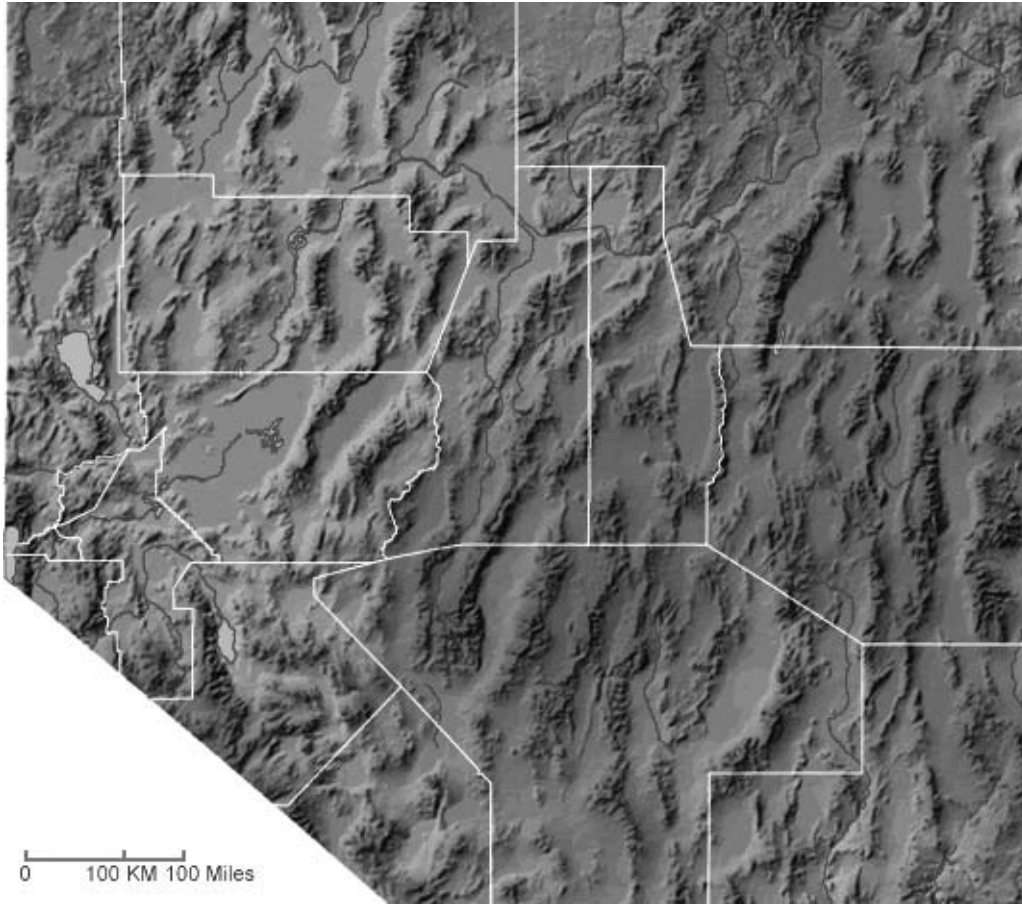


Figure 12: Les plis du Nevada.

Comme il s'agit d'un problème laplacien, le déplacement d'amplitude  $A$  induit en surface du substrat pénètre sur une profondeur  $\lambda$ . L'énergie associée à la déformation du substrat va comme:

$$F_s \approx E_s L \lambda b \left( \frac{A}{\lambda} \right)^2 \approx E_s \lambda b \Delta$$

Dans l'énergie totale, les petites longueurs d'onde coûtent cher en énergie de courbure et les grandes longueurs d'ondes coûtent cher en énergie de flexion. Par conséquent, la sélection de longueur d'onde résulte d'un compromis:

$$\lambda \propto h \left( \frac{E}{E_s} \right)^{1/3}$$