

Géomorphogénèse

Chapitre 1

B. Andreotti

2011/2012

Mécanique des milieux continus Volcanisme; coulées et dômes de lave

1 Lave

La lave est une roche en fusion, plus ou moins fluide, émise par un volcan lors d'une éruption. La lave est issue d'un magma, réserve de roche en fusion située dans l'épaisseur des couches rocheuses solides de la planète. Les laves, au moment où elles sont émises, atteignent des températures qui selon leur composition chimique varient de 700 à 1 200 °C. Elles se solidifient rapidement par refroidissement au contact du sol, de l'atmosphère ou de l'eau et forment alors des roches volcaniques, comme par exemple les basaltes ou les rhyolites. Les roches volcaniques, formées par le refroidissement en surface d'une lave, appartiennent à l'ensemble des roches magmatiques, conjointement avec les roches plutoniques qui sont formées par le refroidissement et la cristallisation d'un magma en profondeur (comme les granites ou les gabbros). L'accumulation des laves et des matériaux éruptifs éjectés (bombes, cendres et lapilli) construit le cône caractéristique des volcans dont la forme dépend de la viscosité de la lave et de sa teneur en gaz. Lorsque qu'une coulée de lave, fluide ou visqueuse, se crée lors d'une éruption, l'aspect de la lave et sa composition ne sont pas toujours les mêmes. En effet, la viscosité de la lave dépend de sa teneur en silice (SiO₂), si la lave est très chargée en silice, elle est visqueuse et inversement. De manière corrélée, la teneur en gaz d'une lave dépend de la nature de la lave. et permet d'expliquer le principe des volcans de type effusifs et explosifs.

Dans les volcans de type explosif, la lave émise lors d'une coulée est visqueuse et très riche en silice. Lors d'une éruption, une nuée ardente peut se créer. Des bulles de gaz se forment et remontent de la chambre magmatique. Cette poussée des gaz vers la surface s'appelle la pression des gaz. Pendant la remontée dans la cheminée, la pression est très élevée (poids de la colonne de magma) et la viscosité de la lave importante. Lorsque la pression des gaz devient supérieure à la pression de la colonne de magma, les gaz sortent brutalement et provoquent l'éjection explosive de particules et de fragments de roche en fusion (bombes, lapillis et cendres). Lorsqu'un volcan explosif entre en éruption, il émet des coulées pyroclastiques, composées de cendres, de lapillis, de monceaux de lave brûlante et de lave visqueuse. Très riche en silicate, très peu fluide, dure, cette lave s'accumule le plus souvent au sommet du volcan, créant ainsi un dôme de lave. Cette lave explosive peut aller à des températures de 1 000 °C à l'extérieur, voir plus dans une chambre magmatique. Lorsque une éruption assez importante se déclenche, des pans entiers du flanc du volcan ou du dôme de lave se détachent et dévalent les pentes à des dizaines de kilomètres par heure. Ces coulées peuvent être très dangereuses pour les populations humaines, notamment par la rapidité de ses coulées et par leur taille. De plus, ces coulées peuvent aller très loin par rapport à l'épicentre de l'éruption, ce qui augmente les chances de destruction d'une zone habitée près du volcan, même à des kilomètres de celui-ci. La roche obtenue lors de telles éruptions est une roche rhyolithique. La rhyolite est une roche volcanique de couleur assez claire : rosée ou grise. C'est une roche à structure microlitique présentant des minéraux visibles à l'œil nu : quartz, feldspaths et

amphibole. Le magma à l'origine des rhyolites se forme soit à partir d'une fusion partielle de la croûte terrestre continentale (cas des rhyolites carbonifères de Montreuillon dans le Morvan), soit le plus souvent, par différenciation d'un magma basaltique (tholéitique surtout), provenant donc de la fusion partielle de la péridotite du manteau.

Dans les volcans de type effusif, dont la lave est pauvre en silice, la lave émise lors d'une coulée est fluide. Lors de la remontée du magma dans la cheminée, les gaz n'ont aucun mal à s'échapper vers le cratère dans la lave fluide. Il n'y a donc aucune augmentation de pression pendant la remontée du magma, qui peut jaillir en fontaine de lave. Ce type de volcan peut également présenter dans leur cratère un lac permanent de lave (ex. : Kilauea-Mauna). La roche obtenue lors d'une coulée de lave effusive est une roche basaltique. Le basalte est une roche volcanique issue d'un magma refroidi rapidement au contact de l'eau ou de l'air. C'est le constituant principal de la couche supérieure de la croûte océanique. Le basalte est une roche mélanocrate à holomélanocrate (sombre à très sombre). Il a une structure microlithique, et il est composé essentiellement de plagioclases (50 %), de pyroxènes (25 à 40 %), d'olivine (10 à 25 %), et de 2 à 3 % de magnétite. Les basaltes sont issus de la fusion partielle du manteau terrestre de composition péridotitique (lherzolite). Lorsque un volcan effusif entre en éruption, il émet des coulées de lave fluide caractéristiques, pauvres en silicates. La température de la lave au sortir du cratère est environ 1200° C. Cette lave basaltique coule à environ 20 km/h en sortant du cratère et se refroidit lentement au contact de l'air, du sol ou de l'eau, diminuant encore leur vitesse. Les coulées sont canalisées et relativement lentes. Lors d'une éruption près d'une zone habitée, des dégâts matériels peuvent être constatés, mais la lenteur de ces coulées permettent aux gens de fuir lors d'une éruption.

On distingue :

- les laves lisses (ou pahoehoe "que l'on peut parcourir pieds nus" selon le mot hawaïen) : coulée de lave très fluide avec une surface régulière, rugueuse et souvent striée
- les laves cordées : coulée de lave très fluide dont la surface montre des bourrelets superposés et entrecroisés (la mince croûte superficielle de la coulée est déformée par l'avancée de la lave au centre de la coulée)
- les laves prismées: Certaines laves, surtout les basaltes, ont un débit en colonnes hexagonales. Ces prismes apparaîtraient lors du refroidissement de la lave (fissures de rétractation). Quand ils sont de grande taille, on parle d'orgues ou de colonnades. Les prismes sont verticaux, parfois en gerbe radiale
- les aa (selon le mot hawaïen) : laves en coulées à surface chaotique, hérissée de blocs basculés. Elle est formée par une lave très rugueuse. Une lave de ce type est moins fluide qu'un pahoehoe, mais également d'origine effusive. Le mot "aa" est un onomatopée du cri d'une personne lorsque qu'elle marche sur ce type de basalte rugueux. Cheire est un mot auvergnat, synonyme de aa.
- la lave en coussins (ou (en)pillow lava) : laves mises en place lors d'une éruption sous-marine
- les dômes, ou aiguilles : construits par des laves très visqueuses.

2 Construire des problèmes

- Coulée de lave sur un plan incliné.
- Etalement d'un dôme de lave.
- Forme d'un panache thermique.
- Formation et propagation d'un dyke.



Figure 1: Dome



Figure 2: Coulée pyroclastique

- Lave prismée.
- Nucléation et dynamique des bulles.

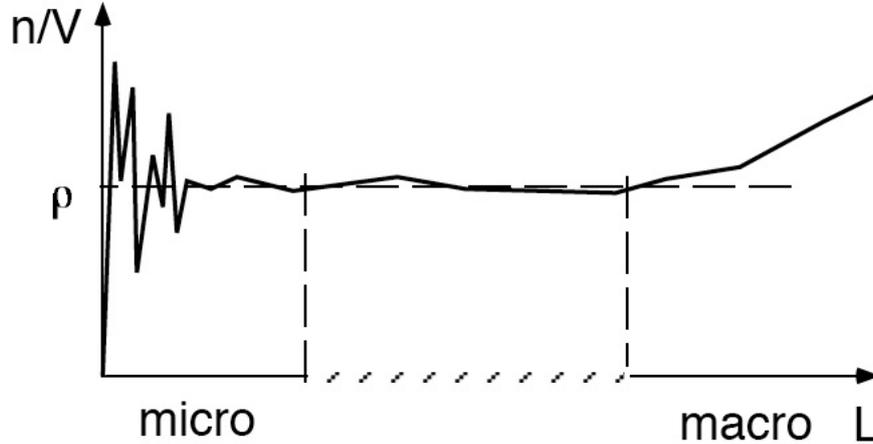
On doit en passer par la mécanique des liquides et des solides.

3 Déplacements, déformations, contraintes

3.1 Description continue et notion de particule

A l'échelle microscopique, dans les phases fluides (gaz et liquide), le mouvement de chaque atome comporte une composante aléatoire (mouvement brownien). L'absence de repos illustre la notion de température. On redéfinit la notion de "particule" : boîte de taille L^3 à laquelle on attribue une masse m et une vitesse \vec{v} définies comme des moyennes sur les n atomes contenus à un instant donné dans la boîte. Pour que ces valeurs moyennes aient un sens physique, il faut que chaque boîte contienne un nombre de particules n suffisant pour que les fluctuations au cours du temps, par exemple de m ou de \vec{v} , soient négligeables. En substance, une particule est un ensemble mésoscopique de particules, suffisamment grand pour que l'on puisse définir précisément les grandeurs thermodynamiques (pression, température, masse volumique) et mécanique (vitesse) par des moyennes d'ensemble, et suffisamment petit pour décrire les variations spatio-temporelles de ces grandeurs. Pour un fluide, une taille de particule grande devant le libre parcours moyen convient (quelques nm^3 pour un liquide) sauf près du point critique où la longueur de corrélation des fluctuations diverge. Dans le cas d'un solide polycristallin, le volume représentatif doit être

choisi de sorte que le comportement reflète la moyenne de l'élasticité selon les différentes orientations.



Le fondement conceptuel de la mécanique des milieux continus (hydrodynamique et élasticité) est l'hypothèse de continuité, selon laquelle les fluides peuvent être décrits par des champs continus. C'est-à-dire que l'on admet que des propriétés telles que la densité $\rho(\vec{r}, t)$, la pression $P(\vec{r}, t)$, la température $T(\vec{r}, t)$, et la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sont prises pour étant bien définies à des points infiniment petits, et ne changent pas d'un point à l'autre. Il faut préciser que cela suppose l'équilibre thermodynamique local à l'échelle de la particule, ce qui n'empêche pas un déséquilibre global. Lien avec le cours : "Phénomènes de transport de matière et de chaleur". La nature discrète et moléculaire d'un fluide est donc ignorée. Les problèmes pour lesquels l'hypothèse de continuité ne donne pas des réponses avec l'exactitude désirée peuvent être envisagé soit du point de vue de la mécanique statistique soit par simulation de la dynamique moléculaire.

3.2 Notions élémentaires sur les tenseurs

Ce paragraphe s'inspire de C. Pozrikidis, "Introduction to theoretical and computational fluid dynamics").

Les équations de la mécanique des milieux continus amènent à manipuler des tenseurs, en particulier le tenseur des contraintes et le gradient de vitesse. Notons ici quelques unes de leur propriétés essentielles. Le caractère tensoriel d'une quantité se définit par rapport à ses transformations dans un changement de repère. Considérons deux systèmes de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) ayant une origine commune. Les coordonnées dans les deux systèmes d'axes sont reliées par :

$$y_i = A_{ij}x_j \quad \text{et} \quad x_i = y_j A_{ji}$$

où \mathbf{A} est une matrice de rotation telle que son inverse soit égale à sa transposée : $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Considérons maintenant une matrice 3x3 \mathbf{T} dont les éléments sont des paramètres physiques dépendant des coordonnées d'espace et de temps. Lorsque les valeurs des éléments de \mathbf{T} dans le système de coordonnées \mathbf{y} , notées $\mathbf{T}(\mathbf{y})$, sont reliées aux valeurs de ces mêmes éléments dans le système de coordonnées \mathbf{x} , notées $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, par les relations :

$$T_{ij}(\mathbf{y}) = A_{ik}A_{jl}T_{kl}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad T_{ij}(\mathbf{x}) = T_{kl}(\mathbf{y})A_{ki}A_{lj}$$

la matrice \mathbf{T} est un tenseur de rang deux. Une des caractéristiques importantes des tenseurs de rang deux est l'invariance de leur polynôme caractéristique $Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ dans un changement de

repère. De ce fait les racines du polynôme caractéristique, qui sont les valeurs propres du tenseur sont également invariantes par changement de repère.

Le polynôme caractéristique peut s'exprimer en fonction des trois invariants du tenseur :

$$Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_3\lambda^2 - I_2\lambda + I_1$$

ces trois invariants ayant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= Det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}([Tr(\mathbf{T})]^2 - Tr(\mathbf{T}^2)) \\ I_3 &= Tr(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

3.3 Rotation et tenseur des déformations

En élasticité, on définit le champ de déplacement u_i à partir de l'état de référence. Le gradient de déplacement \vec{G} obéit aux règles de transformation énoncées ci-dessus, c'est donc un tenseur cartésien de rang deux. En effet, les composantes du déplacement se transforment comme les coordonnées d'espace, soit :

$$u_i(\mathbf{y}) = A_{ij}u_j(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{y})A_{ij}$$

En utilisant la règle de dérivations successives, on a pour la composante G_{ij} du gradient :

$$G_{ij} = \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki}A_{lj} \frac{\partial u_l(\mathbf{y})}{\partial y_k}$$

Le gradient se transforme donc comme :

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = A_{ki}A_{lj}G_{kl}(\mathbf{y}).$$

Le troisième invariant, la trace du tenseur, est ici égal à la divergence du déplacement. Il caractérise le changement relatif de volume d'un élément de solide. Lorsque le solide peut être considéré comme incompressible, la trace de \vec{G} est nulle. Les parties symétrique et antisymétrique de \vec{G} sont également des tenseurs de rang deux.

Ainsi, on définit le tenseur des déformations à partir du champ de déplacement u_i par

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et le vecteur rotation comme le champ $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{u}$. On retiendra qu'un déplacement peut se décomposer (en chaque point) en une composante rotation solide dont le vecteur rotation est donné par la moitié du rotationnel et une composante purement élongationnelle i.e. ne faisant qu'étirer et comprimer les particules suivant deux directions orthogonales.

3.4 Contraintes: définition et propriétés

On définit le vecteur contrainte \vec{c} comme la force par unité d'aire exercée au voisinage d'une surface élémentaire par les particules extérieures sur les particules intérieures. Cette définition, pour être non-ambigüe, suppose qu'on oriente la surface par sa normale \vec{n} pointant par convention vers l'extérieur. La contrainte est alors non seulement fonction de la position \vec{r} mais également de la normale \vec{n} de la surface élémentaire:

$$\vec{c} = \vec{c}(\vec{r}, \vec{n})$$

En particulier, si on permute le rôle de l'intérieur et de l'extérieur, i.e. si on transforme \vec{n} en $-\vec{n}$, on doit avoir, en vertu du principe d'action-réaction:

$$\vec{c}(\vec{r}, -\vec{n}) = -\vec{c}(\vec{r}, \vec{n})$$

Considérons maintenant l'équilibre d'un petit tétraèdre de matière, de volume V convenablement orienté par rapport aux vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les trois faces "basales" ont pour normales $-\vec{e}_1$, $-\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$ tandis que la face inclinée a pour normale $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$. En faisant intervenir les aires des facettes, l'équilibre du système s'écrit :

$$\vec{c}(\vec{n})S + \vec{c}(-\vec{e}_1)\mathcal{S}_1 + \vec{c}(-\vec{e}_2)\mathcal{S}_2 + \vec{c}(-\vec{e}_3)\mathcal{S}_3 + \vec{f}_v V = \vec{0}$$

où \vec{f}_v est une éventuelle force volumique.

Deux remarques vont nous permettre de mettre en évidence une caractéristique essentielle du champ de contrainte. La taille du tétraèdre est choisie suffisamment petite devant l'échelle de variation des champs pour qu'on puisse considérer les contraintes comme uniformes sur chaque face (on ne mentionne plus \vec{r} en conséquence). Si maintenant on opère une homothétie de rapport $\lambda < 1$ sur le tétraèdre, les forces surfaciques seront multipliées par λ^2 tandis que le terme volumique le sera par λ^3 . Lorsque λ tend vers 0, par conséquent, le terme volumique devient négligeable. On supposera que cela est vrai bien avant que les dimensions du tétraèdre deviennent d'ordre atomique, si bien qu'on reste dans le domaine continu. Les coefficients directeurs de \vec{n} s'identifient à $n_i = S_i/S$ pour $i = 1, 2, 3$. En tenant compte de ces remarques et de la symétrie de $\vec{c}(\vec{n})$ on obtient alors :

$$\vec{c}(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3) = n_1\vec{c}(\vec{e}_1) + n_2\vec{c}(\vec{e}_2) + n_3\vec{c}(\vec{e}_3)$$

quelquesoient (n_1, n_2, n_3) . On a donc montré que la relation qui lie \vec{n} et \vec{c} est linéaire. On note σ cette application $\vec{n} \rightarrow \vec{c}$ est appelée tenseur des contraintes. Une fois choisie une base, on représentera ce tenseur par une matrice 3 par 3 dont chacun des 9 coefficients est un champ scalaire $\sigma_{ij}(\vec{r})$ ayant la dimension d'une force par unité d'aire. On peut alors écrire la relation fondamentale :

$$c_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j$$

L'expression entre parenthèses est une notation conventionnelle dite d'Einstein, supposant la sommation implicite sur les indices répétés (ici "j"). Considérons cette fois un petit cube d'arêtes de longueur a parallèles aux vecteurs d'une base orthonormée. En appliquant la relation ci-dessus aux 6 faces de normales $\pm\vec{e}_1$, $\pm\vec{e}_2$ et $\pm\vec{e}_3$, on peut exprimer les composantes des vecteurs contrainte sur ces faces en fonction des composantes du tenseur des contraintes. On vérifie bien que la résultante des forces de surface est bien automatiquement nulle.

L'équilibre mécanique suppose également que leur moment résultant, exprimé par exemple au centre du cube, est nul. Ce moment est :

$$\vec{\mathcal{M}} = (\sigma_{32} - \sigma_{23})a^3\vec{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31})a^3\vec{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12})a^3\vec{e}_3$$

si bien qu'on déduit la propriété importante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

i.e. le tenseur des contraintes est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Par conséquent, il n'y a que 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes, 3 diagonales et 3 non-diagonales. Notons enfin que les termes diagonaux correspondent à des contraintes de traction/compression tandis que les termes non-diagonaux correspondent à des contraintes de cisaillement. Un cube orienté suivant les vecteurs propres du tenseur des contraintes ne subit donc que des tractions/compressions sur ses faces.

3.5 Pression

Un cas particulier est celui d'un champ de pression P pour lequel $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$, le signe moins provenant de la convention $P > 0$ en compression. Le tenseur est donc ici diagonal dans toute

base orthonormée. La pression se définit à la fois, thermodynamiquement, comme l'énergie interne par unité de volume:

$$p = - \left[\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{S,n}$$

et comme la composante isotrope des contraintes normales. Rappelons que la pression d'un gaz parfait résulte exclusivement d'effets cinétiques ($P = \frac{1}{3}nm \langle v^2 \rangle = nkT$) tandis que la pression d'un solide cristallin résulte essentiellement des interactions intermoléculaires.

Si l'on mesure (à l'aide d'un capteur de force du type quartz piezo) la force normale exercée sur une petite surface δS , celle-ci est proportionnelle à la surface, la constante de proportionnalité étant la pression. Dans le cas de l'hydrostatique, c'est la seule composante des contraintes. La pression est un champ **scalaire** donnant lieu à des contraintes **isotropes**. Les forces de pression exercées sur une particule fluide située en \vec{r} à la date t , par le fluide environnant, sont équivalentes à une distribution volumique de force $-\text{grad}P$.

La résultante des forces de pression qui s'applique sur un volume de contrôle vaut :

$$\vec{F} = \oint_{\delta V_a} -P\vec{n} dS = - \int_{V_a} \vec{\text{grad}}P dV$$

(appliquer Ostrogradski à chaque composante). Lorsque l'on passe à une particule fluide, on trouve donc une force volumique égale à $-\vec{\text{grad}}P$.

3.6 Viscosité

On construit dans le cas d'un fluide visqueux la relation constitutive à partir du tenseur des taux de déformation:

$$\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où x_i et v_i désignent respectivement les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse selon la direction i . Le tenseur des contraintes: s'écrit:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta \left(\bar{s}_{ij} - \frac{1}{3}\bar{s}_{ll}\delta_{ij} \right) + \zeta \bar{s}_{ll}\delta_{ij}$$

où η est la viscosité dynamique (de cisaillement) et ζ la seconde viscosité ou viscosité de volume. Dans le cas d'un fluide incompressible, la seconde viscosité n'intervient pas de sorte que le tenseur des contraintes se réduit à:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta\bar{s}_{ij}$$

Considérons un fluide qui s'écoule entre deux parois parallèles horizontales. L'une est fixe, l'autre est animée d'une vitesse V . Il s'établit en régime permanent un gradient de vitesse perpendiculaire aux parois, et les différentes couches de fluide "frottent" les unes sur les autres : une couche plus rapide que sa voisine exerce sur elle une force d'entraînement, et réciproquement la plus lente tend à ralentir sa voisine plus rapide. La "force par unité de surface de contact" entre deux couches voisines est proportionnelle au gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire au mouvement (elle est nulle si toutes les couches vont à la même vitesse), et on appelle "coefficient de viscosité" le coefficient de proportionnalité. En définissant le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \bar{s}_{xz}$, la relation s'écrit:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta\dot{\gamma}$$

La force par unité de surface $\tau = \bar{\sigma}_{xz}$ est désignée sous le terme de "contrainte de cisaillement".

4 Equations de la dynamique

4.1 Euler vs Lagrange

Lagrangien : on identifie chaque particule par sa position \vec{r}_0 à $t = t_0$ et l'on suit son mouvement, entièrement décrit par la donnée de $\vec{r}(\vec{r}_0, t_0, t)$.

Eulérien : on identifie la vitesse des particules passant à la date t en chaque point \vec{r} du fluide et on décrit l'écoulement par le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Un liquide étant infiniment déformable, le déplacement des particules n'est pas une grandeur pertinente et l'on peut oublier, sans perte d'information, la position originelle de chaque particule. Les contraintes dépendent directement du champ de vitesse, et non du champ de déplacement. De plus, les conditions aux limites sont en général données en Eulérien.

Afin de "visualiser un écoulement", on ensemence le fluide de petites particules identifiables optiquement. Dans un premier temps on réalise un film de l'écoulement avec une vitesse d'acquisition telle qu'il est possible de reconstituer le parcours de chaque particule. On obtient alors un ensemble de trajectoires de particules fluides. Dans un second temps, on réalise une seule photo avec un temps de pause suffisamment long pour que le mouvement des particules imprime de petites portions rectilignes identifiables à leurs vecteurs vitesses au moment de la prise. Si la densité de particules est suffisante, on pourra tracer sur le cliché une famille de courbes partout tangentes aux vecteurs vitesses. Ces courbes sont les "lignes de courant" de l'écoulement.

Il est clair que si on reprend une photo à un instant ultérieur, la carte des lignes de courant aura en général changé. Si ce n'est pas le cas et que cette carte est invariable dans le temps, c'est que l'écoulement est stationnaire, i.e. que le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ne dépend pas du temps. Dans ce cas, par construction, une particule située sur une ligne de courant à un instant t s'y retrouvera à tout instant ultérieur (décomposer son mouvement en petites séquences de durée dt et utiliser le champ de vitesse visualisé par les traces pour incrémenter sa position). Les trajectoires s'identifient donc aux lignes de courant pour un écoulement stationnaire.

- trajectoire = $\{\vec{r}(\vec{r}_0, t_0, t); \forall t > t_0\}$. Particules solides en suspension, long temps de pause.
- lignes de courant = $\{\vec{r}(s); \forall s \text{ tq } \vec{v}(\vec{r}, t) \parallel \frac{d\vec{r}}{ds}\}$. Particules solides en suspension, court temps de pause.
- lignes d'émission = $\{\vec{r}(\vec{r}_0, t - \tau, t); \forall \tau > 0\}$.

Dans la description Eulerienne de l'hydrodynamique, on définit, à partir du champ de vitesse v_i , la vorticité comme le champ $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$ et le tenseur des déformations par

$$\bar{s}_{ij} = \frac{d\bar{\epsilon}_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où x_i et v_i désignent respectivement les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse selon la direction i . On retiendra qu'un écoulement peut se décomposer (en chaque point) en une composante rotation solide dont le vecteur rotation est donn e par la moitié du rotationnel et une composante purement élongationnelle, i.e. ne faisant qu'étirer et comprimer les particules fluides suivant deux directions orthogonales.

4.2 Théorème de transport

On considère le champ $f(\vec{r}, t)$ dépendant des coordonnées d'espace \vec{r} et du temps t . La dérivée totale par rapport au temps s'entend comme la dérivée de $f(\vec{r}(\vec{r}_0, t_0, t), t)$ par rapport au temps. La dérivée de $\vec{r}(\vec{r}_0, t_0, t)$ est la vitesse, par définition. D'où

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$$

La variation de l'intégrale de f sur un volume de contrôle V_a susceptible de se déplacer et de se déformer au cours du temps résulte des variations temporelles de cette quantité et du flux à travers les parois. Le volume élémentaire qui traverse la paroi est $\vec{v}_a \cdot d\vec{S}dt$ où \vec{v}_a désigne la vitesse de l'interface. D'où le théorème du transport de REYNOLDS:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_a} f dV = \iiint_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_a} f \vec{v}_a \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}_a) dV$$

La relation est la même lorsque f est une quantité vectorielle (=plusieurs scalaires=composantes). La version unidimensionnelle s'appelle le théorème de LEIBNITZ:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

En analyse vectorielle, le théorème de flux-divergence, aussi appelé le théorème de Green-Ostrogradski ou Gauss-Ostrogradski est un théorème reliant la divergence d'un champ vectoriel à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ. Il stipule que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. L'expression du théorème est le suivant :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas d'un volume matériel, $\vec{v}_a = \vec{v}$ et dans le cas d'un volume de contrôle immobile $\vec{v}_a = \vec{0}$.

4.3 Conservation de la matière

En l'absence de sources de création ou d'annihilation de matière (cas générique), la masse contenue dans un volume matériel se conserve au cours du temps, indépendamment des déformations de ce volume $V_m(t)$. On a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = 0$$

où f désigne la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ d'un fluide (éventuellement compressible). Le taux de variation de la masse contenue dans le volume matériel $V_m(t)$ est donnée par le théorème de transport,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = \int_{V_m} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_m} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{V_m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

où $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesse Eulérien. En passant à l'échelle particulaire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Fluide homogène et incompressible $\rho = \rho_0$ donc $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

4.4 Résultante des forces de surface sur une particule

Considérons un volume V_m de matière limité par une surface fermée S . Notons $\vec{\mathcal{R}}$ la résultante des forces de surface. On a, par définition du tenseur des contraintes : $\vec{\mathcal{R}} = \iint_S \sigma \vec{n} dS$ soit, pour les composantes suivant les vecteurs \vec{e}_i , $i = 1...3$, d'une base orthonormée :

$$R_i = \sum_j \iint_S \sigma_{ij} n_j dS$$

On reconnaît dans l'intégrande le flux d'un vecteur $\vec{\sigma}_i$ de composantes $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$. On peut donc appliquer le théorème de Stokes-Ostrogradski :

$$R_i = \iiint_V \nabla \vec{\sigma}_i dV = \sum_j \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \iiint_V \partial_j \sigma_{ij} dV$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\vec{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta\bar{s}_{ij}$$

On obtient alors :

$$R_i = \iiint_V (2\eta\partial_j s_{ij} - \partial_i P) dV = \iiint_V (\eta(\partial_{jj}^2 v_i + \partial_i \partial_j v_j) - \partial_i P) dV$$

Du fait de l'incompressibilité, on peut encore réduire l'expression :

$$R_i = \iiint_V (\eta\partial_{jj}^2 v_i - \partial_i P) dV$$

ou encore

$$\vec{R} = \iiint_V (\eta\Delta\vec{v} - \vec{\nabla}P) dV$$

4.5 Equations de la dynamique

Prenons temporairement le point de vue d'un fluide. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \vec{v} dV = \vec{\mathcal{R}}$$

où $\vec{\mathcal{R}}$ est la résultante des forces s'appliquant sur le volume matériel considéré. De par le théorème de transport, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho v_i dV = \int_{V_m} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_m} \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{V_m} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) \right) dV = \mathcal{R}_i$$

En passant à l'échelle particulaire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) = v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \right) = \mathcal{R}_i = \eta\partial_{jj}^2 v_i - \partial_i P$$

On obtient finalement l'équation de bilan de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}P + \eta\Delta\vec{v}$$

Dans le cas où il existe une force volumique extérieure, l'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}$$

où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ désigne la viscosité cinématique du fluide (unité SI : $m^2.s^{-1}$). Son équation aux dimensions s'écrit :

$$[\nu] = L^2.T^{-1}$$

Il faut adjoindre à l'équation du mouvement, l'équation de continuité appelée dans ce cas équation d'incompressibilité et qui s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

4.6 Les ressorts cachés de Navier-Stokes

La compréhension des équations de Navier-Stokes constitue l'un des 7 problèmes du millénaire à 10^6 \$. <http://www.claymath.org/millennium/>

4.6.1 Advection; effets inertiels

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

On voit apparaître l'expression des pseudo-forces centrifuge et de coriolis (la vorticité vaut deux fois le vecteur tourbillon). En manipulant les équations de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \left(p + \rho \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

on peut exprimer la relation de Bernoulli: dans un écoulement irrotationnel, stationnaire, dans lequel les effets visqueux peuvent être négligés, on a $p + \rho|\vec{v}|^2/2$ est constant. C'est l'expression de la conservation de l'énergie.

Dernier aspect, il s'agit d'un terme non-linéaire. Considérons par exemple que le champ de vitesse suivant:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (\cos(x), \sin(x)y)$$

La composante en x du terme d'advection s'écrit:

$$v_x \partial_x v_x = -\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \sin(2x)$$

4.6.2 Diffusion visqueuse

Le terme visqueux conduit à une diffusion de la quantité de mouvement. La viscosité tend à homogénéiser l'écoulement. En un temps t , l'homog  n  sation se produit sur une taille $\sqrt{\nu t}$.

Les effets visqueux dissipe l'énergie. Pour le montrer, on multiplie scalairement l'équation de Navier-Stokes par \vec{v} et on en prend la moyenne sur l'ensemble de l'écoulement :

$$\frac{\partial \rho \langle \frac{v^2}{2} \rangle}{\partial t} = \eta \langle \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} \rangle = -2\eta \langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij} \rangle < 0$$

Ainsi, la viscosité agit globalement comme une source de dissipation d'énergie.

4.6.3 Pression

Le terme de pression correspond à une densité de force dérivant d'un potentiel (la pression) qui garantit l'incompressibilité. Dans le cas compressible, l'équation associ  e est une relation d'état qui relie P    ρ . L'évolution de ρ est donn  e par la conservation de la matière. Dans le cas incompressible, la relation d'état se réduit à ρ constant de sorte que l'équation associ  e à la pression s'écrit:

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

Cette équation est non-locale. Cela signifie que la pression à un endroit dépend de la totalité de l'écoulement. La stratégie pour obtenir la pression consiste à calculer la divergence de l'équation de la dynamique:

$$-\rho \text{div} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = \Delta P$$

La pression compense la partie potentielle des effets inertiels.

4.7 Écoulement homogène stationnaire sur un plan incliné

$$0 = g \sin \theta + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (1)$$

Selon la direction transverse, on obtient:

$$0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

Les conditions aux limites à la surface $z = h$ de la coulée s'écrit donc: $\sigma_{xz} = 0$ et $-p + \sigma_{zz} = 0$, ce qui donne:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

pour les contraintes tangentielles et

$$p = 0 \quad (4)$$

pour la contrainte normale. Il s'ensuit par intégration que:

$$p = \rho g \cos \theta [h - z] \quad (5)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement longitudinale s'écrit alors, en utilisant que u_x et u_z sont nul sur le sol:

$$u_x = -\frac{\rho g}{\eta} \sin \theta \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) \quad (6)$$

5 Dome de lave

5.1 Approximation de lubrification

Lorsqu'un liquide est fortement confiné entre deux surfaces, c'est-à-dire que l'épaisseur de liquide est très faible devant les dimensions transversales des parois confinantes, il est possible de simplifier fortement l'équation de Navier-Stokes qui gouverne son écoulement : c'est l'approximation de lubrification, qui permet en particulier de décrire l'écoulement du liquide dans les contacts lubrifiés.

En effet, si $H \ll L$ (où H est l'épaisseur moyenne entre les parois, et L est la dimension transversale caractéristique des parois), alors :

- la composante de la vitesse parallèle aux parois est très grande devant la composante perpendiculaire, que l'on peut négliger ;
- la vitesse varie essentiellement dans la direction perpendiculaire aux parois : on peut donc négliger les dérivées de la vitesse par rapport aux coordonnées parallèles aux parois devant les dérivées par rapport à la coordonnée perpendiculaire ;
- on peut considérer que la pression est constante dans la direction perpendiculaire aux parois.

Un aspect essentiel de cette approximation est que l'on peut négliger le terme inertiel - retrouvant ainsi l'équation de Stokes- lorsque $Re \ll (L/H)$ (où Re est le nombre de Reynolds associé à l'écoulement), condition beaucoup moins restrictive que la condition habituelle $Re \ll 1$ dès lors que L est très grand devant e .

On part de l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{v},$$

où : $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est la vitesse du fluide ; $p(\vec{r}, t)$ est la pression dans le fluide ; ρ est la masse volumique du fluide ; ν est la viscosité cinématique du fluide ; t représente le temps ; $\overrightarrow{\text{grad}}$ et Δ sont respectivement les opérateurs différentiels gradient et laplacien.

Dans le cas d'un écoulement laminaire parfaitement parallèle (par exemple dans une conduite cylindrique), le terme inertiel présent dans l'équation de Navier-Stokes est rigoureusement nul :

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{v} = \vec{0}.$$

Dans le cas d'un écoulement permanent, c'est-à-dire invariant dans le temps, la dérivée temporelle de la vitesse s'annule et on retrouve alors l'équation de Stokes, et ce quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds. Lorsque les parois et donc l'écoulement ne sont pas tout à fait parallèles, dans quelle mesure est-il possible de négliger tout de même le terme inertiel ?

Considérons un liquide quasi-parallèle, par exemple confiné entre deux parois. Afin de simplifier cette étude, on se restreint à un écoulement à deux dimensions (le résultat reste valable pour un écoulement à trois dimensions). On peut projeter l'équation de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

On note e l'épaisseur moyenne entre les parois, et L l'échelle de variation typique de l'épaisseur (par exemple : taille du contact lubrifié ou période caractéristique de la rugosité des surfaces). On suppose que e est très petit devant L : $e \ll L$. L'angle formé par les deux surfaces confinant le liquide est de l'ordre de $\mathcal{O}(\Delta e/L) \sim \mathcal{O}(e/L)$.

On peut alors estimer l'ordre de grandeur des termes présents dans l'équation de Navier Stokes. En notant U la vitesse typique (vitesse moyenne) du liquide parallèlement aux parois et en utilisant l'incompressibilité, on peut estimer l'ordre de grandeur des composantes de la vitesse : $v_x = \mathcal{O}(U)$ et $v_z = \mathcal{O}(Ue/L)$. Si l'épaisseur e est très petite devant la longueur L , on pourra donc négliger v_z devant v_x . Ainsi, dans l'équation de Navier-Stokes, les termes faisant intervenir v_z seront négligeables devant ceux faisant intervenir v_x . La projection sur Oy de l'équation de Navier-Stokes se simplifie alors en:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

indiquant que la variation de pression dans la direction perpendiculaire aux parois peut être négligée.

D'autre part l'échelle de variation de la vitesse perpendiculairement aux parois sera imposée par l'épaisseur H entre celles-ci. La dérivée de la vitesse par rapport à y sera donc de l'ordre de la valeur typique de la vitesse sur la longueur de variation typique, soit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{H}\right).$$

De même, l'échelle de variation de la vitesse parallèlement aux parois sera L et :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{L}\right).$$

En suivant la même démarche, on peut estimer les dérivées secondes de la vitesse selon y :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{H^2}\right);$$

et selon x :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{L^2}\right).$$

A partir de ces estimations, il est possible de comparer les amplitudes des différents termes intervenants dans l'équation de Navier-Stokes. On remarque tout d'abord que dans le terme

visqueux, la dérivée seconde de la vitesse par rapport à x , de l'ordre de U/L^2 , sera négligeable devant la dérivée seconde par rapport à y , de l'ordre de U/H^2 , lorsque H est très petit devant L . Le terme visqueux se réduit alors à :

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \mathcal{O}\left(\nu \frac{U}{H^2}\right).$$

Les deux composantes du terme inertiel seront par contre du même ordre de grandeur :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{O}\left(U \frac{U}{L}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{L}\right);$$

$$v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \mathcal{O}\left(U (H/L) \frac{U}{H}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{L}\right).$$

Le terme inertiel sera donc négligeable devant le terme visqueux lorsque :

$$\frac{U^2}{L} \ll \nu \frac{U}{H^2}, \text{ soit : } \frac{U H}{\nu} \ll \frac{L}{H}.$$

On reconnaît dans le premier membre le nombre de Reynolds associé à l'écoulement. La condition de validité de l'approximation de lubrification s'écrit donc : $Re \ll \frac{L}{H}$, avec $H \ll L$.

En régime permanent, l'écoulement du liquide est finalement gouverné par le jeu d'équations suivant :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

Cette démonstration peut se faire de manière un peu différente, en adimensionnant les équations par ρ , U , L et H .

$$t = (L/U)t', \quad x = Lx', \quad z = Hz', \quad u_x = Uu'_x, \quad u_z = U \frac{H}{L} u'_z, \quad p = \rho U^2 p', \quad (7)$$

L'équation de conservation de la matière s'écrit:

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0 \quad (8)$$

L'équation de la dynamique en x se réécrit:

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial u'_x}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left(u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + u'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z'} \right) = -\frac{U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U}{H^2} \left(\frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} \right) \quad (9)$$

et celle en z :

$$\frac{H}{L} \left[\frac{U^2}{L} \frac{\partial u'_z}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left(u'_x \frac{\partial u'_z}{\partial x'} + u'_z \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) \right] = -\frac{U^2}{H} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{H \nu U}{L H^2} \left(\frac{\partial^2 u'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} \right) \quad (10)$$

Les ordres de grandeur apparaissent alors dans l'équation directement et conduisent aux mêmes équations simplifiées.

5.2 Coulée gravitaire

Considérons une coulée de boue ou de lave sur une pente d'angle θ . Il faut alors prendre en compte la gravité dans les équations. En omettant les termes d'ordre H/L et plus petit, on obtient à l'ordre dominant:

$$0 = g \sin \theta - \frac{U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U}{H^2} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z'^2} \quad (11)$$

ou, sous sa forme dimensionnée,

$$0 = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (12)$$

Selon la direction transverse, on obtient:

$$0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (13)$$

On obtient donc que la distribution de pression est hydrostatique (donc $P = \mathcal{O}(\rho g H \cos \theta)$), et que l'échelle de vitesse est donnée par:

$$U = \frac{H g H \cos \theta}{L \nu} \quad (14)$$

L'air applique une contrainte négligeable sur la surface libre:

$$(-p\delta_{ij} + \sigma_{ij}) n_j = 0, \quad i = x, z. \quad (15)$$

ou

$$-pn_x + X_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z = 0 \quad (16)$$

$$-pn_z + X_{zx}n_x + \sigma_{zz}n_z = 0. \quad (17)$$

en $y = h$. Le vecteur normal a deux composantes:

$$n_x = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \simeq -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \simeq 1 \quad (18)$$

A l'ordre dominant, la condition aux limites à la surface $z = h(x, t)$ de la coulée s'écrit donc: $\sigma_{xz} = 0$ et $-p + \sigma_{zz} = 0$, ce qui donne:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

pour les contraintes tangentielles et

$$p = 0 \quad (20)$$

pour la contrainte normale. Il s'ensuit par intégration que:

$$p(x, z, t) = \rho g \cos \theta [h(x, t) - z] \quad (21)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement longitudinale s'écrit alors, en utilisant que u_x et u_z sont nul sur le sol:

$$u_x = -\frac{\rho g}{\eta} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) \quad (22)$$

La surface libre est matérielle. Cela signifie que la vitesse de l'interface (selon la normale) est égale à la vitesse normale du fluide au même endroit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} = u_z, \quad y = h(x, t) \quad (23)$$

De manière équivalente, on peut écrire la conservation de la matière sur une tranche de fluide:

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u_x dz - u_x(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} + u_z(x, h(x, t), t) = 0$$

qui se réécrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h u_x dz \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

où q représente le débit à travers une tranche et \bar{u} la vitesse horizontale moyenne:

$$\bar{u} = \frac{q}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h u_x dz \quad (25)$$

Le débit total s'obtient par intégration:

$$q = \bar{u}h = \int_0^h u dy = \frac{\rho g h^3}{3\eta} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (26)$$

Combiné avec la conservation de la matière, cela donne l'équation finale:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]} = 0 \quad (27)$$

Il s'agit d'une équation de diffusion non-linéaire de la hauteur de fluide.



Figure 3: Cascade de lave. Lave de type Pahoehoe

5.3 Solutions propagatives: coulée de lave

Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire et homogène ($\partial/\partial x \equiv 0$), le profil de vitesse prend la forme:

$$u_x = \frac{\rho g h^2}{\eta} \sin \theta \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2} \right) \quad (28)$$



Figure 4: Lave de type aa vs Pahoehoe



Figure 5: Lave de type Pahoehoe

où h est constant. Le débit correspondant vaut:

$$q = \frac{\rho g h^3}{3\eta} \sin \theta \quad (29)$$

On cherche une solution sous la forme d'une coulée se propageant sans changer de forme. Long du front, la hauteur tend vers une constante h_∞ et la vitesse vers:

$$u_\infty = \frac{\rho g h^2}{3\eta} \sin \theta \quad (30)$$

Par conservation de la matière, u_∞ est la vitesse du front.

$$h(x, t) = h_\infty f(X), \quad X = \tan \theta \frac{x - u_\infty t}{h_\infty} \quad (31)$$

On obtient:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = -u_\infty \tan \theta f', \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = \tan \theta f'$$

ce qui donne une équation différentielle ordinaire:

$$-\frac{df}{dX} + \frac{d}{dX} \left[f^3 \left(1 - \frac{df}{dX} \right) \right] = 0 \quad (32)$$

Par intégration, on obtient:

$$f^3 \left(1 - \frac{df}{dX} \right) = f$$

qui se réécrit:

$$dX = -\frac{f^2 df}{1 - f^2} = df \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - f} + \frac{1}{1 + f} \right) \right] \quad (33)$$

qui s'intègre en:

$$\boxed{f + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-f}{1+f} \right) = X} \quad (34)$$

5.4 Solutions de similitude par homothétie: dômes de lave

Sur un plan horizontal, l'équation d'évolution de la forme se réduit à une diffusion non-linéaire:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right]} \quad (35)$$

Considérons une masse de lave de volume \mathcal{V} confiné dans une petite région. Par conservation de la matière, on a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, 0) dx = \mathcal{V} \quad (36)$$

Faisons l'analyse dimensionnelle du problème. Les deux équations s'écrivent:

$$\frac{H}{t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{H^4}{L^2} \quad \text{et} \quad H L = \mathcal{V} \quad (37)$$

d'où l'on tire:

$$H = \left(\frac{3\eta \mathcal{V}^2}{\rho g t} \right)^{1/5} \quad \text{et} \quad L = \frac{\mathcal{V}}{H} = \left(\frac{\rho g \mathcal{V}^3 t}{3\eta} \right)^{1/5} \quad (38)$$

Considérons la transformation:

$$h = \left(\frac{3\eta \mathcal{V}^2}{\rho g t} \right)^{1/5} f(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = \left(\frac{3\eta}{\rho g \mathcal{V}^3 t} \right)^{1/5} x \quad (39)$$

ξ est une variable de similitude qui traduit la décroissance de la hauteur comme $t^{-1/5}$ et l'étalement en $t^{1/5}$. L'équation de conservation de la matière devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1 \quad (40)$$

La dérivée temporelle s'écrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{5t} \left(\frac{3\eta \mathcal{V}^2}{\rho g t} \right)^{1/5} [f(\xi) + \xi f'(\xi)] \quad (41)$$

et la dérivée spatiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{3\eta}{\rho g t} \right)^{2/5} \mathcal{V}^{-1/5} f'(\xi) \quad (42)$$

Cela donne:

$$-\frac{1}{5} \left(f + \xi \frac{df}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(f^3 \frac{df}{d\xi} \right) \quad (43)$$

soit encore,

$$5 \frac{d}{d\xi} \left(f^3 \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi} (\xi f) = 0 \quad (44)$$

qui s'intègre en:

$$5f^3 \frac{df}{d\xi} + \xi f = 0$$

La constante d'intégration est nulle par symétrie autour de $x = 0$, qui donne $f'(0) = 0$. Maintenant,

$$5f^2 \frac{df}{d\xi} + \xi = 0, \quad \text{qui implique} \quad \frac{5}{3} df^3 + \xi d\xi = 0$$

Par intégration, on obtient:

$$f = \left[\frac{3}{10} (\xi_0^2 - \xi^2) \right]^{1/3}, \quad -\xi_0 < \xi < \xi_0; \quad = 0, \quad \text{sinon.} \quad (45)$$

où $f(\xi_0) = 0$. ξ_0 est déterminé par l'équation

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi) d\xi = 1.$$

qui donne:

$$\xi_0 = \left(\frac{10}{3} \right)^{1/5} \left(\frac{5}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^{3/5} \quad (46)$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma.

On généralise maintenant à un débit variant comme At^λ , de sorte que le volume \mathcal{V} de lave est toujours confiné dans une petite région mais dépend du temps:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) dx = B t^{\lambda+1} \quad \text{avec} \quad B = \frac{A}{\lambda+1} \quad (47)$$

Faisons l'analyse dimensionnelle du problème. Les deux équations s'écrivent:

$$\frac{H}{t} = \frac{\rho g H^4}{3\eta L^2} \quad \text{et} \quad H L = B t^{\lambda+1} \quad (48)$$

d'où l'on tire:

$$H = \left(\frac{3\eta B^2 t^{2\lambda+1}}{\rho g} \right)^{1/5} \quad \text{et} \quad L = \frac{B t^{\lambda+1}}{H} = \left(\frac{\rho g B^3 t^{3\lambda+4}}{3\eta} \right)^{1/5} \quad (49)$$

Considérons la transformation:

$$h = \left(\frac{3\eta B^2 t^{2\lambda+1}}{\rho g} \right)^{1/5} f(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = \left(\frac{3\eta}{\rho g B^3 t^{3\lambda+4}} \right)^{1/5} x \quad (50)$$

ξ est une variable de similitude qui traduit la décroissance de la hauteur comme $t^{(2\lambda+1)/5}$ et l'étalement en $t^{(3\lambda+4)/5}$. L'équation de conservation de la matière devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1 \quad (51)$$

La dérivée temporelle s'écrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{5t} \left(\frac{3\eta B^2 t^{2\lambda+1}}{\rho g} \right)^{1/5} [(2\lambda+1)f(\xi) - (4+3\lambda)\xi f'(\xi)] \quad (52)$$

et la dérivée spatiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{3\eta}{\rho g t} \right)^{2/5} (B t^{\lambda+1})^{-1/5} f'(\xi) \quad (53)$$

Cela donne:

$$\frac{1}{5} \left[(2\lambda+1)f(\xi) - (4+3\lambda)\xi \frac{df}{d\xi} \right] = \frac{d}{d\xi} \left(f^3 \frac{df}{d\xi} \right) \quad (54)$$

6 Panache thermique

On note $R(z)$ le rayon du panache, $U(z)$ la vitesse d'ascension, $\rho(z)$ la masse volumique. On suppose que la vitesse de mélange varie comme U . La conservation de la masse s'écrit alors:

$$\frac{d(\rho R^2 U)}{dz} \propto \rho_0 R U \quad (55)$$

La variation de quantité de mouvement résulte de la flottaison:

$$\frac{d(\rho R^2 U^2)}{dz} \propto (\rho_0 - \rho) R^2 g \quad (56)$$

De la même manière, la conservation de l'énergie s'écrit:

$$\frac{d(\rho R^2 U C_p T)}{dz} \propto \rho_0 R U C_p T_0 \quad (57)$$

En utilisant la conservation de la masse, on peut soustraire terme à terme $\rho_0 R U C_p T_0$:

$$\frac{d(R^2 U C_p (\rho T - \rho_0 T_0))}{dz} = 0 \quad (58)$$

soit encore:

$$\frac{d((\rho_0 - \rho) R^2 U)}{dz} = 0 \quad (59)$$

On développe les trois équations autour de $\rho = \rho_0$ et $U = 0$. On introduit la pesanteur réduite $\tilde{g} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} g$. On obtient les équations de Batchelor:

$$\frac{d(R^2 U)}{dz} \propto R U, \quad (60)$$

$$\frac{d(R^2 U^2)}{dz} \propto R^2 \tilde{g}, \quad (61)$$

$$\frac{d(R^2 U \tilde{g})}{dz} = 0 \quad (62)$$

On note $F = R^2 U \tilde{g}$ le flux de flottabilité. Les deux équations conduisent aux lois d'échelles:

$$R \propto z, \quad (63)$$

$$U \propto F^{1/3} z^{-1/3}, \quad (64)$$

$$\tilde{g} \propto F^{2/3} z^{-5/3} \quad (65)$$

La tête de panache monte selon une loi:

$$\frac{dh}{dt} \propto U(h) \propto F^{1/3} h^{-1/3} \quad (66)$$

On en déduit:

$$h \propto F^{1/4} t^{3/4} \quad (67)$$