

Chapitre 3

Cohérence et interférométrie

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, une des grandes découvertes du XXème siècle est la prise de conscience que le bruit entachant les mesures n'est pas qu'une nuisance due aux imperfections expérimentales et que dans certains cas celui-ci pouvait être attribué à des causes physiques fondamentales, telles que l'agitation thermique pour des systèmes macroscopiques ou les fluctuations quantiques à l'échelle microscopique. L'étude des propriétés statistiques de la lumière est au cœur de l'optique quantique et le chapitre qui suit est consacré à une description du formalisme de l'optique statistique qui permettent de préciser le concept de cohérence de la lumière et donne accès à des phénomènes nouveaux associés à la nature quantique du rayonnement.

3.1 Rayonnement incohérent, notion de matrice densité

3.1.1 Expérience des fentes d'Young pour une source spatialement étendue, analyse classique

En guise d'introduction aux propriétés de cohérence de la lumière, nous allons considérer l'exemple bien connu de l'expérience des fentes d'Young. Considérons dans un premier temps une source cohérente S placée à une distance L' des fentes, elle-mêmes séparées d'une distance d . On observe les interférences sur un écran placé à une distance L des fentes (Fig. 3.1).

Si l'on note x' la distance de la source au plan de symétrie des fentes, le champ électrique reçu en un point x' du plan d'observation peut s'écrire

$$E = E_0 \left(e^{i\theta_1(x',x)} + e^{i\theta_2(x',x)} \right), \quad (3.1)$$

où $\theta_i(x, x')$ désigne le déphasage de l'onde lors de la propagation de x' à x . L'intensité lumineuse est proportionnelle à $|E|^2$ et varie donc comme

$$I(x) \propto [1 + \cos((\theta_1(x, x') - \theta_2(x, x')))], \quad (3.2)$$

où l'on retrouve la formule des interférences à deux ondes.

Dans l'approximation paraxiale, on a

$$\theta_2(x, x') - \theta_1(x, x') = 2\pi \frac{d}{\lambda} \left(\frac{x}{L} + \frac{x'}{L'} \right). \quad (3.3)$$

Supposons à présent que la source est une fente de largeur h émettant un rayonnement spatialement incohérent. La figure d'interférence obtenue sur l'écran s'obtient alors en sommant les *intensités* émises par chaque source élémentaires $S(x')$. En supposant l'éclairement de la fente source uniforme, on en déduit d'après (3.2) que l'intensité en un point x de l'écran s'écrit

$$I(x) \propto \int_{-h/2}^{+h/2} dx' [1 + \cos(\theta_2(x, x') - \cos(\theta_1(x, x')))]. \quad (3.4)$$

Dans l'approximation paraxiale, on calcule l'intégrale sans difficulté, ce qui nous donne

$$I(x) \propto h + \frac{L'\lambda}{2\pi d} \left[\sin \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{x}{L} + \frac{x'}{L'} \right) \right) \right]_{x'=-h/2}^{x'=h/2}. \quad (3.5)$$

En utilisant l'identité $\sin a - \sin b = 2 \sin((a - b)/2) \cos((a + b)/2)$, on en déduit que

$$I(x) \propto h + \frac{L'\lambda}{\pi d} \sin \left(\frac{\pi dh}{L'\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi dx}{L\lambda} \right), \quad (3.6)$$

soit

$$I(x) \propto 1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi dh}{L'\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi dx}{L\lambda} \right). \quad (3.7)$$

Cette relation se met sous la forme $I(x) = 1 + C \cos(2\pi xd/\lambda L)$, où C désigne le contraste des franges. Dans le modèle considéré, on constate que C est simplement donné par

$$C = \text{sinc} \left(\frac{\pi dh}{L'\lambda} \right), \quad (3.8)$$

et décroît donc lorsque l'on augmente la largeur de la source, ce que l'on observe effectivement sur les photographies de la figure 3.1. On note en particulier la vérification d'une prédiction particulièrement remarquable de la formule du contraste, qui est une inversion de celui-ci lorsque le sinus cardinal change de signe, les franges blanches devenant alors des franges brillantes.

Cette expérience bien connue illustre le concept de cohérence spatiale : malgré son extension spatiale, la source est cohérente sur un angle $\alpha_{\text{coh}} \sim h/\lambda$ sur lequel on peut négliger les retards mutuels entre les différents points

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ

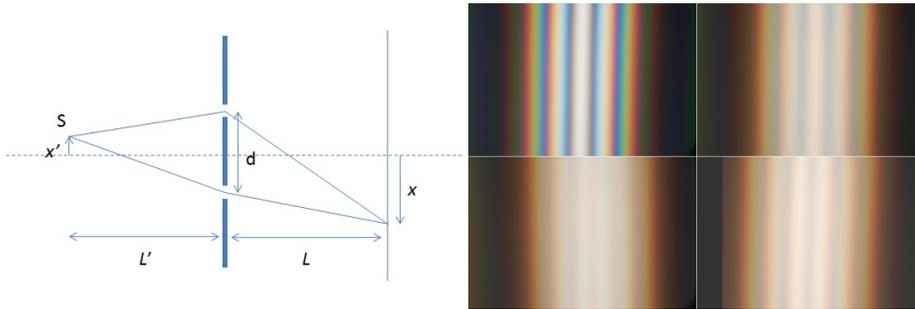


FIGURE 3.1 – Gauche : Principe de l'expérience des fentes d'Young. Droite : évolution du contraste des franges en lumière blanche pour des fentes séparées de $d = 0.2$ mm et pour différentes largeurs de la fente source : 0.03 mm (en haut à gauche) ; 0.36 mm (haut à droite) ; 0.46 mm (bas à gauche) contraste quasi-nul et 0.68 mm (bas à droite) inversion du contraste. La distance entre les fentes et la source est de 15 cm. Photo extraite de [6]

sources¹ : la différence de marche provient alors seulement de la propagation *après* l'écran. Dans l'expérience des fentes d'Young, on fait interférer deux points du front d'onde distants angulairement de $\alpha \sim d/L'$ (on dit que les fentes d'Young constituent un interféromètre à division du front d'onde). On n'obtiendra des franges que lorsque $\alpha \lesssim \alpha_{\text{coh}}$, soit $dh/L'\lambda \lesssim 1$.

3.1.2 Interféromètre stellaire de Michelson et interférométrie optique à longue base

De par leur grande sensibilité, les techniques interférométriques permettent de sensiblement améliorer la résolution et les performances des télescopes. Nous en avons vu un premier exemple dans le cas de l'holographie et nous l'illustrons ici dans le cas de l'interférométrie stellaire en particulier l'interférométrie optique à longue base dont le principe est utilisé dans les télescopes modernes comme le VLT (*Very Large Telescope*) au Chili.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la résolution théorique d'un système optique est limitée par la taille des optiques utilisées². En astronomie, on peut donc en principe améliorer la finesse des observations en utilisant des miroirs le plus grand possible³. Pour des raisons techniques évidentes, il est compliqué et cher de réaliser des miroirs géants et la taille des miroirs des télescopes est en pratique limitée à une dizaine de mètres (le plus grand télescope

1. Il s'agit du même angle que celui de la figure de diffraction de la fente dans l'approximation de Fraunhofer, puisque la tâche de diffraction s'interprète comme la région où les ondelettes de Huygens interfèrent en phase et donc constructivement.

2. Si l'on s'affranchit de la turbulence atmosphérique qui est le vrai facteur limitant pour les télescopes de plus d'un mètre de diamètre.

3. Un autre avantage des miroirs de grande taille est la puissance lumineuse qu'ils peuvent collecter.

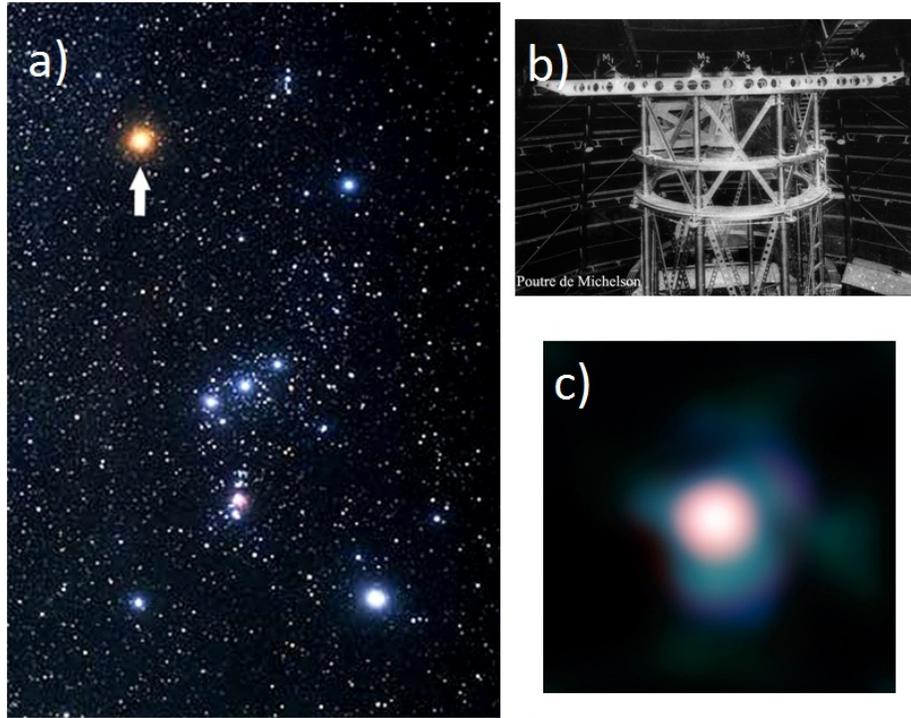


FIGURE 3.2 – Bételgeuse est une supergéante rouge situé dans la constellation d’Orion, à 640 années-lumière de la Terre (a). Son diamètre a été mesuré par Pease à l’observatoire du Mont Wilson (b) en utilisant (les miroirs M_i sont les miroirs). (c) Image de Bételgeuse prise par le VLT.

aujourd’hui en activité est le *Grantepa*, au Canaries).

Dans ce qui suit, nous allons montrer que des techniques interférométriques permettent de contourner ces limitations techniques et qu’en utilisant un ensemble de petite télescopes, il est possible d’atteindre la résolution d’un miroir de diamètre de l’ordre de la distance entre télescopes. Cette technique, suggérée par Fizeau au XIXème siècle et inaugurée par Pease et Michelson en 1920 est baptisée “synthèse d’ouverture” et se fonde sur un principe relativement similaire à la discussion de la cohérence spatiale dans l’expérience des fentes d’Young. Son principe est présenté dans sa version historique sur la figure 3.3 : les trous d’Young sont remplacés par deux miroirs de télescopes. La lumière collectée par les deux miroirs est ensuite recombinaée sur un détecteur afin de mesurer la différence de marche des faisceaux incidents. Au niveau du détecteur, l’intensité lumineuse s’écrit comme la somme incohérente des figures d’interférences provenant des différentes directions incidentes, soit

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ

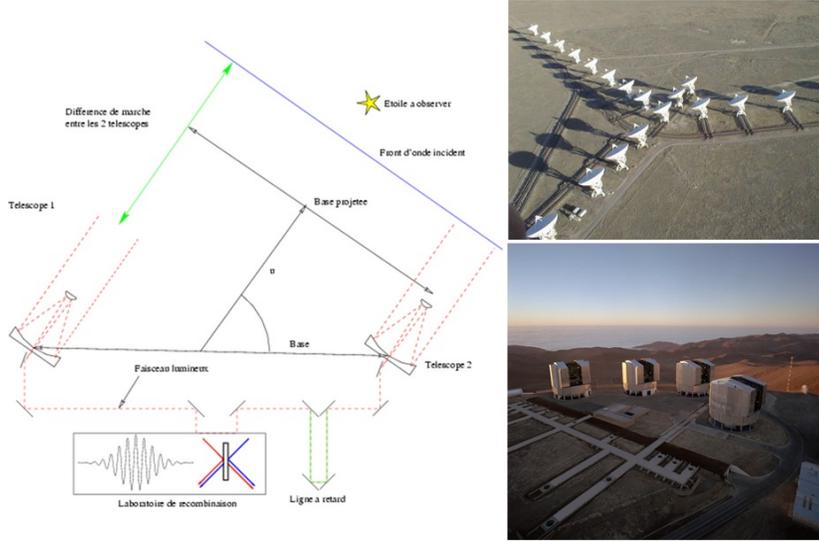


FIGURE 3.3 – Gauche : Principe de l’interférométrie stellaire. Droite : Mise en œuvre pratique dans le domaine radio pour le Very Large Array (VLA, Nouveau Mexique, en haut) et le *Very large Telescope* de l’Observatoire Européen Austral (VLT, Chili, en bas).

$$I(x) = \int d\theta I(\theta) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (d\theta + x) \right) \right], \quad (3.9)$$

où $I(\theta)$ désigne la distribution angulaire d’éclairement et x est la différence de marche entre les miroirs et le détecteur, que l’on peut contrôler à l’aide d’une ligne à retard. En introduisant l’intensité totale $I_0 = \int d\theta I(\theta)$,

$$\frac{I(x)}{I_0} = 1 + \text{Re} \left[\underline{C} e^{-2i\pi dx/L\lambda} \right], \quad (3.10)$$

où le contraste complexe \underline{C} est donné par la transformée de Fourier de l’intensité incidente, à savoir

$$\underline{C} = \frac{1}{I_0} \int d\theta I(\theta) e^{2i\pi d\theta/\lambda} = \frac{\widehat{I}(2\pi d/\lambda)}{I_0}. \quad (3.11)$$

La mesure pour différentes valeurs de D du contraste $|\underline{C}|$ des frange ainsi que leur décalage (associé à la phase de \underline{C}) donne donc directement accès à la transformée de Fourier de I , évaluée en $2\pi d/\lambda$. Faire varier la distance d entre les télescopes, permet alors de reconstruire par transformée de Fourier inverse le profil d’intensité $I(\theta)$. Si D est la distance maximale des télescopes, il est possible d’explorer une plage $\sim 2\pi D/\lambda$ dans l’espace de Fourier, et donc de discerner des

détails de l'ordre de $\delta\Theta \sim \lambda/D$: on constate ainsi que la résolution est limitée par la distance entre télescope, et plus la taille des télescopes individuels⁴.

Comme mentionné plus haut, la première utilisation de cette technique est due à Pearse et Michelson, qui en utilisant le télescope du Mont Wilson aux États Unis sont parvenus à mesurer la taille de Bételgeuse dans la constellation d'Orion (Fig. 3.2). La généralisation de cette technique expérimentale est cependant délicate. En effet, de par sa nature interférométrique, elle nécessite un excellent contrôle des chemins optiques parcourus dans les deux bras de l'interféromètre. Ceci explique pourquoi elle a dans un premier temps été appliquée aux ondes radios, de grande longueur d'onde. Le *Very large Array* (VLA) au Nouveau Mexique a ainsi été inauguré en 1980, et est composé d'un réseau de 27 paraboles de 25 m de diamètres, réparties en Y sur une trentaine de kilomètres et possédant la résolution d'une parabole de 36 km de diamètre. Dans le domaine optique, c'est Antoine Labeyrie qui, à l'Observatoire de Haute Provence, démontra dans les années 70 la possibilité de réaliser de l'observation astronomique interférométrique. Ces travaux sont à l'origine de la mise en chantier du VLT (*Very Large Telescope*) construit au Chili par l'Observatoire Européen Austral (ESO) et mis en service en 2001. Ce réseau de 4 télescopes de 8 m de diamètre chacun réalise un diamètre équivalent d'une centaine de mètre (Fig. 3.3).

3.1.3 Expérience des fentes d'Young pour une source spatialement étendue, analyse quantique

Cherchons à exprimer et modéliser la perte de cohérence spatiale d'une source étendue dans le langage de la mécanique quantique.

Cas d'une source cohérente ponctuelle

Dans sa version cohérente, le photon est émis au point $\mathbf{r}' = (x', -L')$ et se propage jusqu'aux fentes d'Young. L'état du photon s'exprime en fonction de l'opérateur d'évolution $\widehat{U}_{L'} = \widehat{U}(t = L'/c)$ par

$$|\psi\rangle = \widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle = \int d\mathbf{r}''|\mathbf{r}''\rangle\langle\mathbf{r}''|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle, \quad (3.12)$$

Le passage à travers les fentes revient à effectuer une mesure de position laissant indéterminée la fente effectivement empruntée et peut donc être décrit par un projecteur sur l'espace engendré par les états $|\mathbf{r}_{1,2}\rangle$, où $\mathbf{r}_1 = (d/2, 0)$ et $\mathbf{r}_2 = (-d/2, 0)$ désignent la position des deux fentes. D'après le postulat de projection du paquet d'onde, le système après passage dans les fentes est préparé à un facteur de normalisation près dans l'état

$$|\psi'\rangle = |\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle + |\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle. \quad (3.13)$$

4. Comme mentionné précédemment, la taille des télescopes limite la quantité de photons collectés.

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ

On obtient l'état du photon en un point x de l'écran d'observation en appliquant une nouvelle fois l'opérateur d'évolution $\widehat{U}_L = \widehat{U}(t = L/c)$ décrivant la propagation des fentes d'Young au détecteur. L'état du photon juste avant la détection peut alors se mettre sous la forme

$$|\psi''\rangle = \widehat{U}_L|\psi'\rangle \propto \widehat{U}_L|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle + \widehat{U}_L|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle.. \quad (3.14)$$

On en déduit que l'amplitude de détecter le photon en \mathbf{r} est donnée par

$$\langle\mathbf{r}|\psi''\rangle \propto \left[\langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle + \langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle \right]. \quad (3.15)$$

où les éléments de matrice $\langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_{1,2}\rangle\langle\mathbf{r}_{1,2}|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle$ désignent l'amplitude de probabilité d'aller de \mathbf{r}' à \mathbf{r} en passant par la fente située en $\mathbf{r}_{1,2}$. Dans l'approximation paraxiale, les probabilités sont indépendantes des positions initiales ou finales et sont identiques sur les deux chemins. On pose donc

$$\langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_{1,2}\rangle\langle\mathbf{r}_{1,2}|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle = \sqrt{\rho}e^{i\theta_{1,2}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}, \quad (3.16)$$

où ρ et $\theta_{1,2}$ sont réels. On en déduit que la densité de probabilité d'observer le photon en \mathbf{r} est donnée par

$$P(\mathbf{r}) = |\langle\mathbf{r}|\psi''\rangle|^2 \propto [1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)], \quad (3.17)$$

un résultat tout à fait analogue à celui obtenu dans le cas classique.

Cas d'une source étendue

Pour décrire dans ce cadre le comportement d'une source étendue, on modélise celle-ci par une assemblée d'atomes initialement tous dans l'état excité. À $t = 0$ un atome situé en \mathbf{r}' se désexcite et émet un photon. Le système photon + source peut alors être décrit par un état

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r}'\rangle \otimes |f_{\mathbf{r}'}\rangle, \quad (3.18)$$

où N est le nombre d'atomes de la source et $|f_{\mathbf{r}'}\rangle$ désigne l'état de la source dans lequel tous les atomes sont dans l'état excité, sauf celui en \mathbf{r}' qui est passé dans l'état fondamental. Si l'on laisse évoluer le système on trouve après le temps $t' = L'/c$ nécessaire au photon à atteindre les fentes

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}'} \left(\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle \right) \otimes \left(\widehat{U}'_{L'}|f_{\mathbf{r}'}\rangle \right), \quad (3.19)$$

où $\widehat{U}_{L'}$ est l'opérateur d'évolution du photon introduit précédemment et $\widehat{U}'_{L'}$ est l'opérateur d'évolution des atomes. On a supposé par ailleurs qu'une fois émis le photon n'interagit plus avec les atomes.

Après passage à travers les fentes, on a comme précédemment une projection de l'état du système sur le sous-espace des états du photon engendré par les $|\mathbf{r}_{1,2}\rangle$, soit

$$|\psi'\rangle \propto \left[\sum_{\mathbf{r}', \alpha=1,2} \langle \mathbf{r}_\alpha | \widehat{U}_{L'} | \mathbf{r}' \rangle | \mathbf{r}_\alpha \rangle \otimes | f'_{\mathbf{r}'} \rangle \right], \quad (3.20)$$

avec $|f'_{\mathbf{r}'}\rangle = \widehat{U}'_{L'} |f_{\mathbf{r}'}\rangle$. Notons que l'opérateur évolution étant unitaire, la famille des états $|f'_{\mathbf{r}'}\rangle$ est orthonormée. La propagation durant le temps $t = L/c$ jusqu'à l'écran d'observation se décrit comme précédemment à l'aide des opérateur \widehat{U}_L et $\widehat{U}_{L'}$ et le système juste avant la mesure est décrit par le vecteur d'état

$$|\psi''\rangle \propto \left[\sum_{\mathbf{r}', \alpha=1,2} \langle \mathbf{r}_\alpha | \widehat{U}_{L'} | \mathbf{r}' \rangle \widehat{U}_L | \mathbf{r}_\alpha \rangle \otimes | f''_{\mathbf{r}'} \rangle \right], \quad (3.21)$$

avec $|f''_{\mathbf{r}'}\rangle = \widehat{U}'_L |f'_{\mathbf{r}'}\rangle = \widehat{U}'_L \widehat{U}'_{L'} |f_{\mathbf{r}'}\rangle$. La famille des $|f''_{\mathbf{r}'}\rangle$ étant une famille orthonormée, la probabilité d'observer le photon en un point \mathbf{r} de l'écran est donnée par

$$P(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'} |(\langle \mathbf{r} | \otimes \langle f''_{\mathbf{r}'} |) |\psi''\rangle|^2 \propto \left| \sum_{\alpha} \langle \mathbf{r} | \widehat{U}_L | \mathbf{r}_\alpha \rangle \langle \mathbf{r}_\alpha | \widehat{U}_{L'} | \mathbf{r}' \rangle \right|^2. \quad (3.22)$$

En utilisant l'expression des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution, on en déduit que

$$P(\mathbf{r}) \propto \sum_{\mathbf{r}'} [1 + \cos(\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \theta_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))]. \quad (3.23)$$

On retrouve la formule établie classiquement, à savoir que l'on reconstruit la figure d'interférence de la source étendue en sommant les intensités (les probabilités) issues des sources élémentaires. On peut d'ailleurs pousser l'analogie plus loin en supposant que les atomes sont suffisamment densément répartis pour pouvoir remplacer la somme sur x' par une intégrale, soit

$$P(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2dx'}{h} [1 + \cos(\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \theta_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))], \quad (3.24)$$

qui redonne à un facteur multiplicatif près la figure d'interférence classique.

On voit ici l'origine de la perte de cohérence : après son émission, le photon n'est pas dans un état pur, mais est *intriqué* avec la source⁵. Cette intrication transfère aux atomes une partie de l'information sur l'état quantique du photon et permet d'avoir connaissance du chemin suivi par celui-ci en effectuant une mesure sur les atomes. On est alors dans une situation très similaire au cas où l'on place un polariseur devant une des fentes, qui permet en effectuant une mesure de polarisation du photon de connaître le chemin suivi.

5. Autrement dit, l'état du système photon+source ne peut pas se mettre sous forme d'un produit $|\psi_{\text{photon}}\rangle \otimes |\psi_{\text{source}}\rangle$.

3.1.4 Notion de matrice densité

On généralise la situation précédente en considérant une situation où le rayonnement, décrit par l'espace de Hilbert \mathcal{E}_1 introduit au premier chapitre précédents, est couplé à un environnement dont les états quantiques appartiennent à un espace \mathcal{E}_2 . Si l'on note $|\alpha\rangle_1$ et $|\beta\rangle_2$ une base des deux espaces, une base d'états décrivant le système complet est donnée par la base produit tensorielle $|\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2$ que l'on notera pour simplifier $|\alpha, \beta\rangle$. De façon générale, un état du système se met sous la forme

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} |\alpha, \beta\rangle. \quad (3.25)$$

Du fait de la structure de l'espace produit-tensoriel, cet état ne se met pas en général sous la forme d'un état produit-tensoriel $|\varphi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ ce qui correspond à l'existence d'états intriqués dans lesquels une partie de l'information concernant le rayonnement peut se trouver cachée dans l'environnement, aboutissant ainsi à une possible perte des phénomènes d'interférence.

Cherchons à calculer la valeur moyenne d'une observable \hat{A} du rayonnement. D'après les principes généraux de la mécanique quantique, cette valeur moyenne vaut

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} c_{\alpha, \beta} c_{\alpha', \beta'}^* \langle \alpha', \beta' | \hat{A} | \alpha, \beta \rangle. \quad (3.26)$$

Comme \hat{A} n'opère que sur le rayonnement, on peut écrire que $\langle \alpha', \beta' | \hat{A} | \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \langle \beta' | \beta \rangle = \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \delta_{\beta, \beta'}$. On peut par conséquent simplifier l'expression de la valeur moyenne qui nous donne

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \left[\left(\sum_{\beta} c_{\alpha, \beta} c_{\alpha', \beta}^* \right) \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \right]. \quad (3.27)$$

Introduisons un opérateur $\hat{\rho}$, appelé matrice densité, défini par les éléments de matrice

$$\langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \left(\sum_{\beta} c_{\alpha, \beta} c_{\alpha', \beta}^* \right).$$

On peut alors récrire la valeur moyenne de \hat{A} comme

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \left(\rho_{\alpha, \alpha'} \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \right) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (3.28)$$

où Tr désigne la trace.

La connaissance de l'opérateur densité contient donc toute l'information nécessaire à la description des propriétés du rayonnement, et nous allons en préciser certaines propriétés.

1. $\hat{\rho}$ est hermitien. Ceci découle immédiatement de sa définition (3.1.4), puisque l'on a $\langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha' \rangle^*$.
2. La probabilité de trouver le système dans l'état α est l'élément diagonal $\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$. En effet, d'après le postulat de la mesure, cette probabilité vaut $\sum_{\beta} |\langle \alpha \beta | \psi \rangle|^2 = \sum_{\beta} |c_{\alpha\beta}|^2 = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$.
3. La matrice densité est positive et de trace unité. Ceci découle de la propriété précédente.
4. Si l'état total se met sous la forme d'un produit tensoriel $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$, alors $\hat{\rho}$ est le projecteur $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$. Écrivons $|\varphi_1\rangle = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle$ et $|\varphi_2\rangle = \sum_{\beta} b_{\beta} |\beta\rangle$. L'état complet $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ s'écrit alors

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} |\alpha, \beta\rangle, \quad (3.29)$$

soit $c_{\alpha\beta} = a_{\alpha} b_{\beta}$. On en déduit donc que $\langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha \rangle = a_{\alpha} a_{\alpha'}^* \sum_{\beta} |b_{\beta}|^2 = a_{\alpha} a_{\alpha'}^*$, en utilisant la normalisation de $|\varphi_2\rangle$. En notant que $\hat{\rho} = \sum_{\alpha, \alpha'} \rho_{\alpha' \alpha} |\alpha'\rangle\langle\alpha|$, ceci nous permet d'écrire

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| a_{\alpha'}^* = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|. \quad (3.30)$$

Notons au passage que la valeur moyenne de l'observable \hat{A} définie par la relation (3.28) redonne bien alors la définition classique $\langle \hat{A} \rangle = \langle \varphi_1 | \hat{A} | \varphi_1 \rangle$.

5. $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$ et l'égalité est atteinte si et seulement si $\hat{\rho}$ est un projecteur. $\hat{\rho}$ étant hermitien, on peut le diagonaliser et on note p_i ses valeurs propres. D'après ce qui précède, on a l'encadrement $0 \leq p_i \leq 1$ ce qui implique que $p_i^2 \leq p_i$ et donc $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_i p_i^2 \leq \sum_i p_i = 1$. Si ρ est un projecteur, on a $\hat{\rho}^2 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| = \hat{\rho}$ et donc $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$. La réciproque se démontre en notant que si aucun p_i différent de 0 ou 1, alors l'inégalité $p_i^2 \leq p_i$ est en fait une inégalité stricte. Pour obtenir l'égalité, il faut par conséquent avoir pour tout i $p_i^2 = p_i$ et donc $p_i = 0$ ou $p_i = 1$. Comme par ailleurs, $\sum_i p_i = 1$, un seul p_i (disons $i = 0$ pour fixer les idées) vaut 1, les autres valant 0, ce qui prouve le résultat souhaité, $\hat{\rho}$ étant le projecteur sur le vecteur propre associé à la valeur propre p_0 .

La matrice densité généralise par conséquent a notion de vecteur d'état aux systèmes ouverts. À ce titre, elle est au cœur de la physique statistique quantique puisque dans les ensembles canoniques et grand-canonique on met le système étudié en contact avec des réservoirs d'énergie et de particules. Elle permet ainsi la définition quantique de l'entropie qui caractérise le contenu en information du système. On l'utilise aussi abondamment en information quantique pour caractériser le degré d'intrication de deux q-bits ou la décohérence d'un état quantique.

3.1.5 Equation d'évolution de la matrice densité

Dans l'espace complet rayonnement+environnement, le vecteur d'état obéit à l'équation de Schrödinger dépendant du temps

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ 11

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \widehat{H}|\psi\rangle, \quad (3.31)$$

ce qui s'écrit dans la base des états couplés $|\alpha, \beta\rangle$

$$i\hbar \dot{c}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'\beta'} \langle \alpha, \beta | \widehat{H} | \alpha', \beta' \rangle c_{\alpha'\beta'}. \quad (3.32)$$

Nous avons vu que les éléments de matrice de la matrice densité se mettaient sous la forme $\rho_{\alpha,\alpha'} = \sum_{\beta} c_{\alpha,\beta} c_{\alpha',\beta}^*$. En dérivant par rapport au temps, on en déduit donc que

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha,\alpha'}}{dt} = i\hbar \sum_{\beta} [\dot{c}_{\alpha,\beta} c_{\alpha',\beta}^* + c_{\alpha,\beta} \dot{c}_{\alpha',\beta}^*], \quad (3.33)$$

soit en utilisant l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha,\alpha'}}{dt} = \sum_{\beta,\beta''\alpha''} [H_{\alpha\beta,\alpha''\beta''} c_{\alpha''\beta''} c_{\alpha',\beta}^* - H_{\alpha'\beta,\alpha''\beta''} c_{\alpha,\beta} c_{\alpha''\beta''}^*]. \quad (3.34)$$

Supposons à présent que le hamiltonien \widehat{H} ne couple pas les systèmes 1 et 2 et puisse par conséquent s'écrire $\widehat{H} = \widehat{H}^{(1)} + \widehat{H}^{(2)}$. On aura alors respectivement $H_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}^{(1)} = H_{\alpha\alpha'}^{(1)} \delta_{\beta\beta'}$ et $H_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}^{(2)} = H_{\beta\beta'}^{(2)} \delta_{\alpha\alpha'}$. Si l'on remplace dans (3.34) \widehat{H} par cette expression, on constate que la contribution de $\widehat{H}^{(2)}$ disparaît et qu'il reste pour finir

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha,\alpha'}}{dt} = \sum_{\beta,\alpha''} [H_{\alpha,\alpha''}^{(1)} c_{\alpha''\beta} c_{\alpha',\beta}^* - H_{\alpha',\alpha''}^{(1)} c_{\alpha,\beta} c_{\alpha''\beta}^*] \quad (3.35)$$

$$= \sum_{\alpha''} [H_{\alpha,\alpha''}^{(1)} \rho_{\alpha''\alpha'} - H_{\alpha',\alpha''}^{(1)} \rho_{\alpha\alpha''}] \quad (3.36)$$

On reconnaît ici un produit matriciel, ce qui permet de simplifier cette expression en

$$i\hbar \frac{d\widehat{\rho}}{dt} = [\widehat{H}^{(1)}, \widehat{\rho}]. \quad (3.37)$$

Cette équation peut être résolue formellement en introduisant l'opérateur d'évolution $\widehat{U}^{(1)}$ associé à $\widehat{H}^{(1)}$ et donc solution de l'équation

$$i\hbar \frac{d\widehat{U}^{(1)}}{dt} = \widehat{H}^{(1)} \widehat{U}^{(1)}. \quad (3.38)$$

On constate alors que la solution générale de (3.37) est donnée par

$$\widehat{\rho}(t) = \widehat{U}^{(1)}(t) \widehat{\rho}(0) \widehat{U}^{(1)\dagger}(t), \quad (3.39)$$

ce que l'on peut vérifier en remplaçant simplement dans l'équation (3.37), et en utilisant l'unicité des solutions d'une équation différentielle du premier ordre.

Remarquons que pour un état pur, l'état $|\psi(t)\rangle = \tilde{U}^{(1)}(t)|\psi(0)\rangle$, ce qui nous donne bien la relation (3.39) pour $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$.

3.1.6 Retour sur la cohérence spatiale du rayonnement

La matrice densité nous permet de réinterpréter et généraliser l'expérience des fentes d'Young pour une source incohérente, sans avoir à décrire explicitement l'état de la source lumineuse. Après passage à travers les fentes d'Young, nous avons vu que dans le cas cohérent, le photon était décrit par un état pur

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi'_1} |\mathbf{r}_1\rangle + e^{i\chi'_2} |\mathbf{r}_2\rangle \right], \quad (3.40)$$

où $\chi'_\alpha(\mathbf{r}')$ correspond au déphasage associé à la propagation de la source en \mathbf{r}' à la fente située en \mathbf{r}_α

Au contraire, dans le cas incohérent, le photon est intriqué à la source et nous avons vu que l'état du système photon+source se mettait sous la forme

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{\mathbf{r}'} |f'_{\mathbf{r}'}\rangle \otimes \left(e^{i\chi'_1(\mathbf{r}')} |\mathbf{r}_1\rangle + e^{i\chi'_2(\mathbf{r}')} |\mathbf{r}_2\rangle \right). \quad (3.41)$$

Formellement cet état se met sous la forme $|\psi'\rangle = \sum_{\mathbf{r}',\alpha} c_{\alpha,\mathbf{r}'} |f'_{\mathbf{r}'}\rangle |\alpha\rangle$ avec

$$c_{\alpha,\mathbf{r}'} = \frac{e^{i\chi'_\alpha(\mathbf{r}')}}{\sqrt{2N}}. \quad (3.42)$$

On peut donc décrire l'état du photon après passage à travers les fentes à l'aide d'une matrice densité, dont les composantes s'écrivent

$$\rho_{\alpha,\alpha'} = \sum_{\mathbf{r}'} c_{\alpha,\mathbf{r}'} c_{\alpha',\mathbf{r}'}^* \sim \int \frac{dx' N}{h} c_{\alpha,\mathbf{r}'} c_{\alpha',\mathbf{r}'}^*, \quad (3.43)$$

où l'on a fait comme précédemment l'hypothèse d'une densité uniforme d'atomes le long de la source. Les éléments de matrice se calculent ensuite sans difficulté et l'on obtient

$$\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2 \quad (3.44)$$

$$\rho_{12} = \rho_{21}^* = \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\chi'_1(\mathbf{r}') - \chi'_2(\mathbf{r}')} \frac{dx'}{h} = \text{sinc}(khd/2L), \quad (3.45)$$

où l'on reconnaît le contraste des franges dans le modèle classique. On peut interpoler entre les deux situations limites étudiées précédemment en considérant un source partiellement cohérente en considérant que l'état du photon après passage par les fentes se met sous la forme d'une matrice densité s'écrivant

$$\widehat{\rho} = \frac{1}{2} \langle (|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|) + \alpha|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_2| + \alpha^*|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_1| \quad (3.46)$$

La propagation du photon jusqu'à l'écran d'observation est décrite par le même opérateur d'évolution que précédemment avec $\widehat{\rho}(t = c/L) = \widehat{U}_L \widehat{\rho} \widehat{U}_L^\dagger$. La probabilité d'observer le photon au point \mathbf{r} est donné par $\langle \widehat{r} | \widehat{\rho} | \widehat{r} \rangle$, soit

$$P(\mathbf{r}) = \langle \widehat{r} | \widehat{U}_L \widehat{\rho} \widehat{U}_L^\dagger | \widehat{r} \rangle \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} &= \rho_{11} |\langle \mathbf{r}_1 | \widehat{U}_L | \mathbf{r} \rangle|^2 + \rho_{22} |\langle \mathbf{r}_2 | \widehat{U}_L | \mathbf{r} \rangle|^2 + 2\text{Re} \left[\rho_{12} \langle \mathbf{r} | \widehat{U}_L | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \widehat{U}_L^\dagger | \mathbf{r} \rangle \right] \\ &= 1 + |\alpha| \cos(\chi_1(\mathbf{r}) - \chi_2(\mathbf{r}) + \varphi), \end{aligned} \quad (3.49)$$

où φ est l'argument de α . On constate que dans le cas d'une source incohérente, on obtient comme attendu le résultat classique. On note par ailleurs que $|\alpha|$ (et plus généralement les éléments non diagonaux) caractérise le contraste des frange. Pour $\alpha = 0$, les franges disparaissent⁶.

3.1.7 Application à la polarisation de la lumière

Les concepts précédents fournissent un nouvel éclairage à la notion de polarisation de la lumière. Pour cela, on s'intéresse à l'espace des états de spin du photon, qui comme nous l'avons vu est un espace de dimension 2 dont une base est constituée des états de polarisations linéaires orthogonales $|x\rangle$ et $|y\rangle$ (si la direction de propagation est selon z).

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, l'état de polarisation le plus général du champ électromagnétique est donné par une matrice densité 2×2 . Si on la représente dans la base des états de polarisation linéaire, celle-ci prend donc la forme

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} p_x & \alpha \\ \alpha^* & p_y \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

où $p_{i=x,y}$ représente la probabilité de mesurer le photon dans l'état de polarisation linéaire $|i = x, y\rangle$, avec $p_x + p_y = 1$. Dans ce cas particulier, ρ est aussi baptisé "matrice de polarisation". Comme nous l'avons vu dans la discussion des propriétés générales de la matrice densité, celle-ci correspond à un état pur (une lumière polarisée) si $\text{Tr}(\widehat{\rho}^2) = 1$. Plus précisément, on a

$$\text{Tr}(\widehat{\rho}^2) = p_x^2 + p_y^2 + 2|\alpha|^2 = p_x^2 + (1 - p_x)^2 + 2|\alpha|^2.$$

Lorsque l'on varie p_x entre -1 et +1, le minimum de $\text{Tr}(\widehat{\rho}^2)$ est atteint pour $p_x = 1/2$ où il vaut $1/2 + 2|\alpha|^2$. $\text{Tr}(\widehat{\rho}^2)$ est donc toujours supérieur à $1/2$, ce qui permet de définir le degré de polarisation du rayonnement $\pi = (2\text{Tr}(\widehat{\rho}^2) - 1)^{1/2}$ qui vaut 1 pour une lumière parfaitement polarisée et 0 si celle-ci est non polarisée.

⁶. C'est pour cette raison que les éléments non-diagonaux de la matrice densité sont donc appelées les cohérences.

À titre d'exemple, considérons un rayonnement dont les intensités dans les polarisations x et y sont égales. On a alors $p_x = p_y = 1/2$.

La lumière la moins polarisée (c'est-à-dire la plus loin de la condition $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$) correspond à $\alpha = 0$ et donc une matrice densité

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Cette matrice est une homothétie et garde donc la même forme dans toute base. En particulier, quelle que soit la représentation choisie, ses éléments diagonaux valent $1/2$. Du point de vue expérimental, ceci correspond à une transmission $1/2$ à travers un polariseur, quelle que soit la direction de son axe passant ⁷.

Au contraire, on obtient un état pur si $|\alpha| = 1/2$. Le cas $\alpha = 1/2$ correspond à un état de polarisation $|\psi\rangle_{\pi/4}$, puisque le projecteur associé à pour expression ⁸

$$|\psi_{\pi/4}\rangle\langle\psi_{\pi/4}| = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

3.2 Optique statistique

3.2.1 Optique statistique

Nous avons vu dans les parties précédentes comment décrire des rayonnements cohérents et incohérents. Nous allons à présent rassembler ces notions de façon à établir les propriétés de cohérence temporelle du champ électromagnétique.

Considérons le champ électromagnétique dans le formalisme de la seconde quantification. Pour simplifier la discussion nous ne considérerons ici qu'un seul mode de vecteur d'onde \mathbf{k} , de pulsation ω et dont l'opérateur annihilation associé est noté \hat{a} . L'observable champ électrique est alors définie par

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mathcal{E}_{\mathbf{k}} (\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \mathbf{e}_\mu. \quad (3.53)$$

Si l'état du champ est représenté par un opérateur densité $\hat{\rho}$, la valeur moyenne du champ électrique au point \mathbf{r} se met comme précédemment sous la forme

$$\langle\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})). \quad (3.54)$$

Le calcul de cette quantité nécessite la connaissance des valeurs moyennes de \hat{a} et \hat{a}^\dagger . Or, en utilisant la relation de fermeture des états cohérents, on a pour tout opérateur \hat{A} , $\text{Tr}(\hat{A}) = \int d^2\alpha \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle/\pi$, soit

$$\langle\hat{a}\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha|\hat{\rho}\hat{a}|\alpha\rangle. \quad (3.55)$$

⁷. Y compris en étendant la mesure aux polarisations circulaires.

⁸. On laissera au lecteur le soin de vérifier que le cas $\alpha = \pm i/2$ correspond à un état pur de polarisation circulaire droite ou gauche.

Or par définition des états cohérents, on a $\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, ce qui nous permet d'écrire

$$\langle \widehat{a} \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha \langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (3.56)$$

et en passant au complexe conjugué

$$\langle \widehat{a}^\dagger \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^* \langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (3.57)$$

Autrement dit, tout se passe comme si l'on tirait la valeur de la variable normale α selon une distribution de probabilité $P(\alpha) = \langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle$. Ce résultat se généralise à toute grandeur dans lesquelles les opérateurs créations et annihilations sont rangées dans l'ordre *anti-normal*, les opérateurs annihilations à gauche des opérateurs créations. En effet pour un monôme $\widehat{a}^m \widehat{a}^{\dagger m}$, on a

$$\langle \widehat{a}^n \widehat{a}^{\dagger m} \rangle = \text{Tr}(\widehat{\rho} \widehat{a}^n \widehat{a}^{\dagger m}) = \text{Tr}(\widehat{a}^{\dagger m} \widehat{\rho} \widehat{a}^n). \quad (3.58)$$

Si l'on développe la trace selon les états cohérents, il vient en utilisant leur définition

$$\langle \widehat{a}^n \widehat{a}^{\dagger m} \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha | \widehat{a}^{\dagger m} \widehat{\rho} \widehat{a}^n | \alpha \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^{*m} \alpha^n P(\alpha). \quad (3.59)$$

Dans le cas où les opérateurs ne sont pas rangés dans l'ordre anti-normal (par exemple si l'on considère le nombre d'excitations $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$), cette propriété n'est plus valable. On peut cependant s'y ramener en utilisant la relation de commutation $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1$. Ainsi, on aurait pour le nombre d'excitations

$$\langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle = \langle \widehat{a} \widehat{a}^\dagger + 1 \rangle = 1 + \int P(\alpha) |\alpha|^2 \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (3.60)$$

Dans le dernier terme, le 1 correspond à la valeur du commutateur entre les opérateurs créations et annihilation et donc aux phénomènes purement quantiques. Dans la limite classique où le système est fortement excité, on a $\langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle \gg 1$, ce qui permet d'écrire que

$$\langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle \sim \int P(\alpha) |\alpha|^2 \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (3.61)$$

Cette propriété s'étend à tout produit d'opérateurs \widehat{a} et \widehat{a}^\dagger et on conclue que dans la limite classique, on peut utiliser la distribution $P(\alpha)$ pour calculer la valeur moyenne d'un produit d'opérateur rangé dans l'ordre quelconque.

Ces résultats se généralisent sans difficulté au cas où plusieurs modes du champ électromagnétique sont peuplés et l'on peut ainsi définir une distribution $P(\{\alpha_\mu\})$ donnant la probabilité d'observer les modes μ dans un produit d'états cohérents $\bigotimes_\mu |\alpha_\mu\rangle$.

Étudions la distribution $P(\alpha)$ dans quelques cas simples.

1. *État cohérent.* Si le champ électromagnétique est dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$, on a $\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$. La distribution de probabilité $P(\alpha)$ est donc $|\langle\alpha|\alpha_0\rangle|^2 = \exp -|\alpha - \alpha_0|^2$. Autrement dit, α suit une loi Gaussienne centrée sur α_0 . Dans la limite classique discutée plus haut $|\alpha_0| \gg 1$. Ceci permet de négliger la largeur de la distribution para rapport à sa valeur moyenne, ce qui permet d'approcher $P(\alpha)$ par $\pi\delta(\alpha - \alpha_0)$.
2. *État nombre.* Si le champ est dans un état de Fock $|n\rangle$, on a $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ et donc $P(\alpha) = |\langle\alpha|n\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n!$. Dans le plan complexe, cette distribution décrit un anneau, ce qui traduit l'indétermination de la phase d'un état nombre. Le rayon de l'anneau est $|\alpha| = \sqrt{n}$.
3. *Distribution thermique.* D'après la loi de Boltzmann, la matrice densité d'un système à l'équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température T est $\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{H}}/Z$, où $\beta = 1/k_B T$ et $Z = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}}$ est la fonction de partition. Dans le cas présent, si l'on omet les fluctuations du vide⁹, on a $\hat{H} = \hbar\omega\hat{n}$ et donc

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n} |n\rangle\langle n|. \quad (3.62)$$

La distribution de probabilité dans l'espace des phases vaut par conséquent

$$P(\alpha) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{Z} \sum_n \frac{(e^{-\beta\hbar\omega} |\alpha|^2)^n}{n!} = \frac{1}{Z} \exp [|\alpha|^2 (e^{-\beta\hbar\omega} - 1)]. \quad (3.63)$$

Dans ce cas aussi, nous constatons que la distribution de probabilité décrit un anneau traduisant l'absence de cohérence de phase d'une source thermique.

D'après ce qui précède, dans le cadre de la mécanique quantique tout se passe comme si le champ électrique se décomposait comme une superposition aléatoires d'ondes planes décrites par des variables normales α_μ tirées selon la distribution $P(\{\alpha_\mu\})$. En notation complexes, le champ électrique s'écrit donc

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_\mu \mathcal{E}_k |\alpha_\mu| e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t + \phi_\mu)} \mathbf{e}_\mu, \quad (3.64)$$

où $|\alpha_\mu$ et ϕ_μ (l'argument de α_μ) sont tirés selon la loi $P(\{\alpha_\mu\})$.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que les propriétés statistiques de la lumière peuvent être étudiées expérimentalement par diverses techniques interférométriques qui, à leur tour, peuvent nous fournir des informations précieuses sur la source du rayonnement électromagnétique.

9. Qui peuvent de toute façon être absorbées dans la fonction de partition.

3.2.2 Notion de fonction de corrélation

On définit la fonction de corrélation spatio-temporelle $g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ par

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle \underline{E}_\alpha^*(\mathbf{r}_1, t_1) \underline{E}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |\underline{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\underline{E}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}}. \quad (3.65)$$

Cette fonction mesure le degré de corrélation entre les composantes α et β du champs en (\mathbf{r}_i, t_i) . En effet, considérons le cas où les phases des $\underline{E}_\alpha^*(\mathbf{r}_i, t_i)$ sont complètement aléatoires, ce qui correspond à une valeur moyenne nulle du champ. Si les deux champs ceux-ci sont statistiquement indépendants, on a $\langle \underline{E}(\mathbf{r}_1, t_1)^* \underline{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \langle \underline{E}(\mathbf{r}_1, t_1)^* \rangle \langle \underline{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 0$. Par ailleurs, d'après l'inégalité de Schwarz, on a $|g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)| \leq 1$, le maximum étant atteint lorsque les deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre et donc parfaitement corrélées.

Comme nous allons le voir, cette fonction permet d'unifier et généraliser les différentes mesure de cohérence spatiale, temporelle ou de polarisation

1. *Mesure de polarisation.* Considérons comme dans le cas de la discussion du degré de polarisation, une onde électromagnétique dont on sait que les intensités dans les polarisations x et y sont égales et que l'on fait passer à travers un polariseur dont l'axe passant est incliné d'un angle θ par rapport à l'axe x . Après passage dans le polariseur, le champ électrique $\underline{E}'(\mathbf{r}, t)$ est donné par la projection sur la direction passante du champ incident, soit en négligeant de déphasage dû à la propagation dans le polariseur

$$\underline{E}'(\mathbf{r}, t) = [\underline{E}_x(\mathbf{r}, t) \cos \theta + \underline{E}_y(\mathbf{r}, t) \sin \theta] \mathbf{u}_\theta, \quad (3.66)$$

où \mathbf{u}_θ désigne la direction passante du polariseur. Si l'on calcule l'intensité transmise, on constate que celle-ci vaut après la moyenne statistique

$$\langle |\underline{E}'(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = [\langle |\underline{E}_x|^2 \rangle + \langle |\underline{E}_y|^2 \rangle + \sin(2\theta) \text{Re}(\underline{E}_x(\mathbf{r}, t)^* \underline{E}_y(\mathbf{r}, t))] . \quad (3.67)$$

Si l'on considère le cas particulier $\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = E_0^2$, on constate que cette expression peut se mettre sous une forme plus compacte en introduisant la fonction de corrélation (3.65), soit

$$\langle |\underline{E}'(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = E_0^2 [1 + \sin(2\theta) \text{Re}(g_{xy}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t))] . \quad (3.68)$$

Comme décrit précédemment, on observe une modulation de l'intensité lorsque l'angle θ varie, et plus les composantes x et y sont corrélées, plus le contraste des oscillations est important. Pour des une polarisation incohérente, la phase relative des composantes x et y est aléatoire, et on a donc $g_{xy} = 0$: l'intensité transmise ne dépend pas de l'angle de rotation du polariseur. Au contraire, lorsque la polarisation est purement linéaire inclinée de $\pi/4$ par rapport à l'axe x , on retrouve un contraste de 100%,

correspondant à une extinction totale lorsque l'axe passant est orthogonal à la polarisation incidente.

2. *Interféromètre à division du front d'onde, expérience des fentes d'Young.* Considérons une onde monochromatique polarisée linéairement. Le champ électrique complexe en un point \mathbf{r} de l'écran peut s'écrire

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) = \left[e^{ik\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}/L_0} \underline{E}(\mathbf{r}_1, t) + e^{ik\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}/L_0} \underline{E}(\mathbf{r}_2, t) \right] e^{ikL_0}. \quad (3.69)$$

L'intensité moyenne sur l'écran s'écrit donc

$$|\underline{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = |\underline{E}(\mathbf{r}_1, t)|^2 + |\underline{E}(\mathbf{r}_2, t)|^2 + 2\text{Re} \left(\underline{E}(\mathbf{r}_1, t)^* \underline{E}(\mathbf{r}_2, t) e^{ik(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}/L_0} \right). \quad (3.70)$$

Lorsque l'on réalise la moyenne statistique, et en supposant les intensités égales au niveau des deux fentes sources, on constate que

$$|\underline{E}(\mathbf{r})|^2 \propto 1 + \text{Re} \left[g(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) e^{ik(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}/L_0} \right]. \quad (3.71)$$

En comparant aux résultats déjà obtenus précédemment, nous en déduisons que le module de la fonction de corrélation spatiale définit le contraste des franges d'interférences.

3. *Interféromètre à division d'amplitude.* Les deux grandes familles d'interféromètres à division d'amplitude sont l'interféromètre de Mach-Zender et l'interféromètre de Michelson (voir Fig. 3.4). Dans les deux cas, le faisceau lumineux est divisé en deux par une lame séparatrice et les faisceaux se propagent indépendamment dans chaque bras de l'interféromètre. On les recombine ensuite sur une séparatrice et l'on observe l'intensité résultant de l'interférence des deux faisceaux. Si l'on éclaire l'interféromètre en lumière quasi-parallèle, on fait interférer deux faisceaux provenant de points identiques de la source, ce qui permet de négliger les problèmes de cohérence spatiale. En notant $L_{1,2}$ les chemins optiques des deux bras de l'interféromètres, le champ électrique total au point d'observation s'écrit

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) \propto \underline{E}(\mathbf{r}_0, t - L_1/c) + \underline{E}(\mathbf{r}_0, t - L_2/c). \quad (3.72)$$

En supposant comme précédemment les deux bras équilibrés, l'intensité mesurée en sortie de l'interféromètre s'écrit

$$\langle |\underline{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \propto 1 + \text{Re} [g(\mathbf{r}_0, t - L_1/c; \mathbf{r}_0, t - L_2/c)]. \quad (3.73)$$

Le signal d'interférence est donc donné par la fonction de corrélation temporelle du champ électrique et mesure donc le degré de cohérence des entre deux instants distincts.

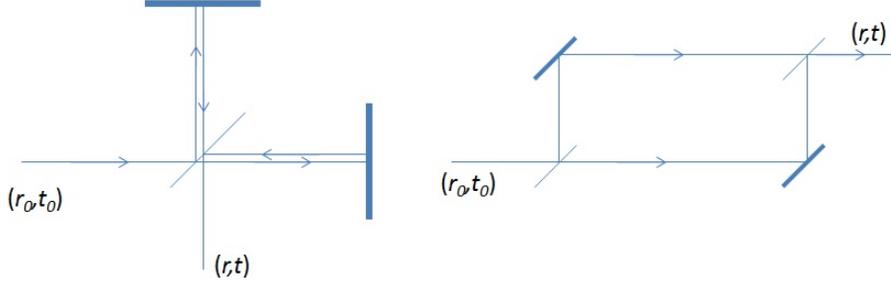


FIGURE 3.4 – Interféromètre à division d'amplitude : à gauche l'interféromètre de Michelson, à droite l'interféromètre de Mach-Zehnder.

3.2.3 Théorème de Wiener-Khintchine, spectroscopie par transformée de Fourier

Nous avons déjà discuté des notions de cohérence spatiale d'une source et nous allons ici nous concentrer sur les propriétés de cohérence temporelle, mesurées par exemple dans un interféromètre de Michelson, en montrant notamment que la fonction de corrélation temporelle donne accès au contenu spectral du rayonnement.

En effet, considérons une expérience dans laquelle on acquiert pendant un intervalle de temps $[-T, T]$ le champ électrique $\underline{E}(t)$ émis par la source. On peut alors calculer la transformée de Fourier $\hat{\underline{E}}_T(\omega)$ de ce signal, définie par ¹⁰

$$\hat{\underline{E}}_T(\omega) = \int_{-T}^{+T} \underline{E}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.74)$$

La moyenne statistique du module-carré de $\hat{\underline{E}}_T$ s'écrit alors

$$\langle |\hat{\underline{E}}_T|^2 \rangle = \int_{-T}^T dt \int_{-T}^{+T} dt' e^{i\omega(t-t')} \langle \underline{E}^*(t) \underline{E}(t') \rangle. \quad (3.75)$$

On reconnaît dans l'intégrale la fonction de corrélation du champ électrique. Si l'on suppose la situation stationnaire, la fonction $g^{(1)}(t, t')$ ne dépend que de $t' - t$ et l'on en déduit que

$$\langle |\hat{\underline{E}}_T|^2 \rangle = \langle |\underline{E}|^2 \rangle \int_{-T}^T dt \int_{-T}^{+T} dt' e^{i\omega(t-t')} g^{(1)}(t' - t) = \int_{-T}^T dt \int_{-T-t}^{T-t} d\tau e^{-i\omega\tau} g^{(1)}(\tau), \quad (3.76)$$

avec $\tau = t' - t$. Lorsque le temps d'acquisition tend vers l'infini, l'intégrale sur τ tend vers la transformée de Fourier de $g^{(1)}$ et l'on obtient alors

10. On limite le domaine d'intégration à l'intervalle $[-T, T]$ pour deux raisons : d'une part parce qu'en pratique une acquisition expérimentale dure un temps fini et par ailleurs, ceci permet à l'intégrale 3.74 d'être bien définie en temps que fonction.

$$\left\langle \left| \widehat{\underline{E}}_T \right|^2 \right\rangle \sim \langle |\underline{E}|^2 \rangle \int_{-T}^T dt \widehat{g}^{(1)}(\omega) = 2T \langle |\underline{E}|^2 \rangle 2T \widehat{g}_1(\omega), \quad (3.77)$$

Cette dernière égalité montre que la fonction $\langle |\widehat{\underline{E}}_T|^2 \rangle / 2T$ a une limite bien définie lorsque T tend vers l'infini, que l'on baptise distribution spectrale de \underline{E} , et notée $S_{\underline{E}}(\omega)$. D'après l'expression précédente, on en déduit par ailleurs que la distribution spectrale est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ, à savoir

$$S_{\underline{E}}(\omega) = \langle |\underline{E}|^2 \rangle \widehat{g}^{(1)}(\omega). \quad (3.78)$$

La présence du facteur $2T$ dans la définition du spectre de puissance peut se comprendre en notant que $|\underline{E}(t)|^2$ est proportionnel au vecteur de Poynting de l'onde et donc à son intensité. Si l'on veut connaître l'intensité moyenne de l'onde, on doit calculer

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |\underline{E}(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\text{inf}}^{+\infty} |\widehat{\underline{E}}_T(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.79)$$

où l'on a utilisé le théorème de Parseval-Plancherel pour établir la seconde égalité. On constate donc que la densité spectrale de puissance est proportionnelle à $|\widehat{\underline{E}}_T(\omega)|^2 / 2T$, qui n'est rien d'autre que la fonction $S_{\underline{E}}(\omega)$ introduite plus haut.

L'égalité 3.78 constitue le *Théorème de Wiener-Kintchine* qui pose les bases de la spectroscopie par transformée de Fourier. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, la fonction $g^{(1)}$ est aisément mesurable par des techniques interférométriques. En effectuant la transformée de Fourier de celle-ci on a alors accès au contenu spectral de l'onde. Cette technique se fondant sur des mesures interférométriques est d'autant plus facile d'usage que les longueurs d'onde concernées sont grandes. On l'utilise donc couramment dans l'infra-rouge lointain ($\lambda \sim 10 \mu\text{m}$), domaine spectral correspondant aux spectres de vibration/rotation des molécules. On l'utilise par conséquent dans l'analyse chimique de composés organiques ou inorganiques, sa relative robustesse permettant notamment la réalisation de spectromètres portatifs utilisés pour l'analyse de vapeurs de pots d'échappements.

3.3 Interférométrie d'intensité et effet Hanbury-Brown et Twiss

L'interférométrie stellaire présentée au paragraphe précédente est très délicate à mettre en œuvre puisqu'il est nécessaire de maintenir à tout instant un trajet optique identique entre les différents télescopes. Pour contourner cette difficulté, Hanbury-Brown et Twiss¹¹ ont démontré la possibilité de réaliser des interférences à partir de la corrélation temporelle des intensités lumineuses et

11. Remarque : Hanbury-Brown n'est qu'une seule personne!

3.3. INTERFÉROMÉTRIE D'INTENSITÉ ET EFFET HANBURY-BROWN ET TWISS²¹

sans avoir donc à maintenir le déphasage entre télescopes constants. Contrairement aux interféromètres plus standard que nous avons décrit jusqu'ici, l'interféromètre d'Hanbury-Brown et Twiss mesure les corrélations d'intensité, et pas du champ électrique et donne donc accès à la fonction de corrélation d'ordre deux

$$g^{(2)}(t_1, t_2) = \frac{\langle I(t_1)I(t_2) \rangle}{\langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle}. \quad (3.80)$$

La fonction de corrélation $g^{(2)}$ possède les propriétés mathématiques suivantes :

1. $g^{(2)}(t, t) \geq 1$. En effet, on a $\langle (I(t) - \langle I(t) \rangle)^2 \rangle \geq 0$. En développant le terme de gauche de l'inégalité, on en déduit que $\langle I(t)^2 \rangle \geq \langle I(t) \rangle^2$, ce qui conclue la démonstration.
2. $g^{(2)}(t_1, t_2) \rightarrow 1$ lorsque $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$. En effet, pour des intervalles de temps grand devant le temps de corrélation de l'intensité, les variables aléatoires $I(t_1)$ et $I(t_2)$ deviennent indépendantes. On en déduit donc que $\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle$ et donc $g^{(2)}(t_1, t_2) = 1$.
3. $g^{(2)}(t_1, t_2) \leq \sqrt{g^{(2)}(t_1, t_1)g^{(2)}(t_2, t_2)}$. Cette inégalité est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle AB \rangle \leq \sqrt{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle}$. Dans le cas où les fluctuations de l'intensité sont stationnaires, $g^{(2)}$ ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$ et l'on a donc $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(\tau = 0)$.

À partir de ces propriétés, on peut tracer l'allure générique de la fonction $g^{(2)}$. Comme montré ci-dessus, elle présente un maximum pour $t_1 = t_2$. Ceci s'explique par un effet de *groupement* des photons, due à leur nature bosonique.

Dans le cas où le champ électromagnétique peut être décomposé en modes incohérents entre eux, il existe une relation simple entre $g^{(2)}$ et $g^{(1)}$ étudiée précédemment. En effet, on peut écrire $\langle I(t_1)I(t_2) \rangle$ à l'aide des champs électriques sous la forme

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \langle \underline{E}^*(t_1)\underline{E}^*(t_2)\underline{E}(t_1)\underline{E}(t_2) \rangle. \quad (3.81)$$

Si prend pour origine le point de mesure et que l'on décompose le champ électrique selon ces modes propres, ceci se réécrit comme

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \sum_{1234} \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4 \rangle e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 - \omega_3 t_1 - \omega_4 t_2)}. \quad (3.82)$$

Les modes étant incohérents entre eux, la moyenne du produit vaut zéro, sauf lorsque les modes 1,2,3,4 sont deux à deux identiques. On a dans ce cas deux possibilité : soit $(1 \equiv 3; 2 \equiv 4)$, soit $(1 \equiv 4; 2 \equiv 3)$, ce qui nous donne alors¹²

¹². En toute rigueur, il faudrait traiter à part le cas $1 \equiv 2 \equiv 3 \equiv 4$, puisque l'on n'a pas en général $\langle \mathcal{E}_1^4 \rangle = \langle \mathcal{E}_2 \rangle^2$. Cependant, si le nombre de mode peuplé est important, cette situation se produit rarement et peut donc être négligée - pour N modes peuplés, il y a N^2 valeurs possibles du couple $(1, 2)$ dont seulement N cas correspondant à $1 \equiv 2$.

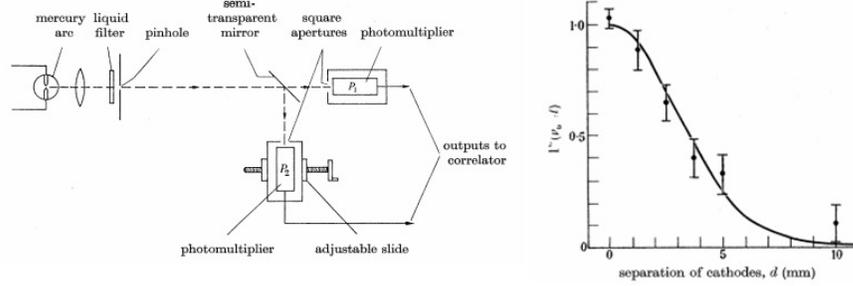


FIGURE 3.5 – Mesure de la fonction de corrélation $g^{(2)}$ par Hanbury-Brown et Twiss (données extraites de [1]). Gauche : schéma du dispositif expérimental. Une lampe à mercure éclaire une lame séparatrice dirigeant les photons vers les deux photomultiplicateurs. Le décalage temporel dans les deux bras est réalisé en déplaçant un des détecteurs par rapport à la lame. Droite : résultat expérimentaux, avec $\Gamma(\tau) = (g^{(2)}(\tau) - 1)/((g^{(2)}(0) - 1))$ et $\tau = d/c$. L'amplification des corrélations provient de la nature bosoniques des photons qui ont tendance à arriver ensemble sur le détecteur.

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \sum_{12} \langle |\mathcal{E}_1|^2 \rangle \langle |\mathcal{E}_2|^2 \rangle + \sum_{12} \langle |\mathcal{E}_2|^2 \rangle \langle |\mathcal{E}_1|^2 \rangle e^{-i(\omega_1(t_1-t_2))} e^{-i(\omega_2(t_2-t_1))}. \quad (3.83)$$

On peut alors factoriser les sommes sur 1 et 2, ce qui donne alors

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle \left[1 + |g^{(1)}(t_1, t_2)|^2 \right], \quad (3.84)$$

soit

$$g^{(2)}(t_1, t_2) = 1 + |g^{(1)}(t_1, t_2)|^2. \quad (3.85)$$

Cette équation montre que la mesure de la fonction de corrélation du second ordre donne accès aux mêmes informations que les techniques interférométriques décrites dans la partie précédente, et donc de mesurer des propriétés de phase du rayonnement, *sans avoir à maintenir la condition de cohérence entre les champs en t_1 et t_2* . Cette propriété a été mise en évidence par Robert Hanbury-Brown et Richard Twiss qui l'ont ensuite utilisée pour mesurer le rayon de l'étoile Sirius, on procédant de façon tout à fait analogue à ce que nous avons étudié dans l'interférométrie stellaire.

Du point de vue quantique, on peut interpréter le résultat de l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss comme un effet de coalescence des photons qui tendent à se regrouper sous l'effet de leur propriétés statistiques. Si les photons avaient été des fermions, on aurait d'ailleurs observé un effet inverse, c'est-à-dire une diminution de $g^{(2)}$ pour $t_2 = t_1$. Cet effet peut être observé sur des électrons comme démontré dans la référence [3, 5]. Une comparaison directe des

3.3. INTERFÉROMÉTRIE D'INTENSITÉ ET EFFET HANBURY-BROWN ET TWISS²³

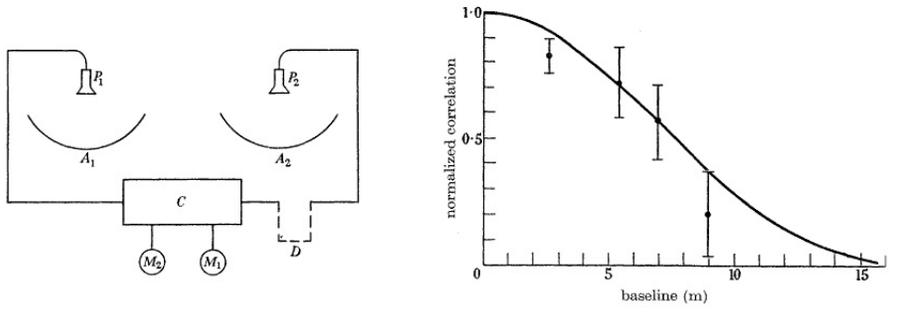


FIGURE 3.6 – Principe de l'interféromètre stellaire de Hanbury-Brown et Twiss.[2]

corrélations bosoniques et fermioniques dans le domaine spatial a par ailleurs été réalisée récemment dans des expériences d'atomes ultra-froids sur les isotopes bosoniques et fermioniques de l'hélium (^4He et ^3He respectivement, cf. fig. 3.7, tirée de [4]).

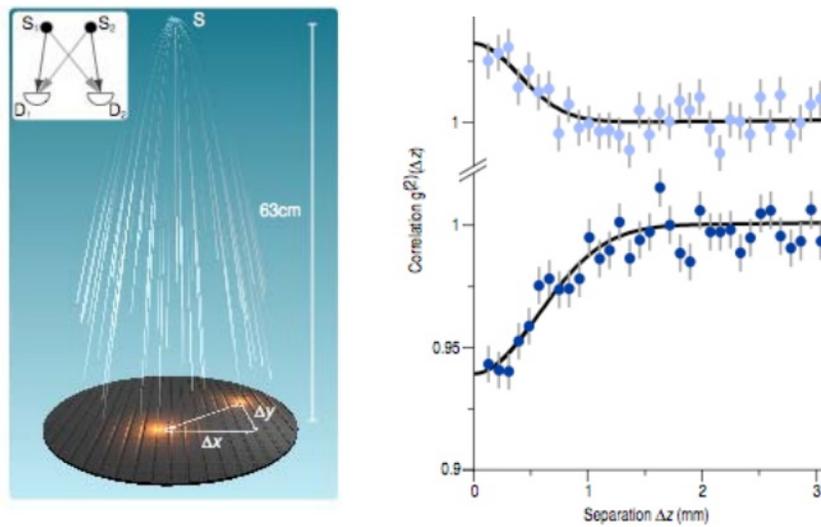


FIGURE 3.7 – Effet Hanbury Brown et Twiss atomique : mesure des corrélations spatiales d'intensité pour un gaz d'atomes d'hélium bosonique (haut) ou fermionique (bas).

Bibliographie

- [1] R. Hanbury-Brown and RQ Twiss. Interferometry of the intensity fluctuations in light II. An experimental test of the theory for partially coherent light. *Proc. of the Royal Society of London A*, 243(1234) :291–319, 1958.
- [2] R. Hanbury-Brown and RQ Twiss. Interferometry of the intensity fluctuations in light. IV. A test of an intensity interferometer on Sirius A. *Proc. Royal Society of London. Series A*, 248(1253) :222–237, 1958.
- [3] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schönenberger. The fermionic hanbury brown and twiss experiment. *Science*, 284(5412) :296, 1999.
- [4] T. Jelts, J.M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect, et al. Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions. *Nature*, 445(7126) :402–405, 2007.
- [5] H. Kiesel, A. Renz, and F. Hasselbach. Observation of Hanbury Brown–Twiss anticorrelations for free electrons. *Nature*, 418(6896) :392–394, 2002.
- [6] G. Rebmann and F.-X. Bally. Franges d’Young en lumière blanche pour différentes largeurs de fente source - Inversion du contraste. <http://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00291697/en/>, 2008.