

Chapitre 2

Propagation de la lumière

2.1 Introduction qualitative

Nous avons vu au précédent chapitre que dans la théorie quantique, les champs électriques et magnétiques obéissent (en moyenne) aux équations de Maxwell. Dans ce chapitre nous allons nous pencher sur leur résolution dans le cadre de l'approximation paraxiale correspondant aux conditions de Gauss de l'optique géométrique où l'on considère des rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe optique du système considéré.

Les concepts que nous aborderons s'illustrent de manière simple sur l'exemple de la propagation de la lumière laser dont une des particularités remarquables est sa grande directionnalité. Au contraire de la lumière issue de sources lumineuses classiques qui est émise dans toutes les directions, le faisceau issu d'un laser est pratiquement unidirectionnel. Cette conséquence de l'émission stimulée n'est en réalité vraie qu'à *courte distance* de la source. En effet, on constate que loin du laser le rayon diverge légèrement. Cette propriété est simplement due à la diffraction, conséquence du diamètre fini d du faisceau laser. Plus précisément, on sait que pour un faisceau de longueur d'onde λ , l'angle de diffraction vaut $\alpha \sim \lambda/d$ et le rayon du laser à une distance L de la source vaut

$$d(z) \sim \alpha L \sim \frac{\lambda L}{d} \quad (2.1)$$

Cette relation n'est valable qu'à longue distance. En effet, lorsque L tend vers 0, le diamètre $d(z)$ doit tendre vers d , ce qui contredit l'équation (2.1). Cette relation n'est donc valable que pour $d(z) \gg d$ soit $z \gg d^2/\lambda$. Pour z plus petit, on peut supposer que le diamètre du rayon n'a pas été sensiblement modifié (Fig. 2.1).

L'existence de ces deux régimes délimités par une échelle de distance $z_R \sim d^2/\lambda$, appelée longueur de Rayleigh, est un phénomène général que nous retrouverons dans l'étude de la propagation d'un faisceau lumineux quelconque. Nous montrerons en particulier que ces deux régimes correspondent à des limites différentes du Principe de Huygens. À longue distance, on est dans la li-

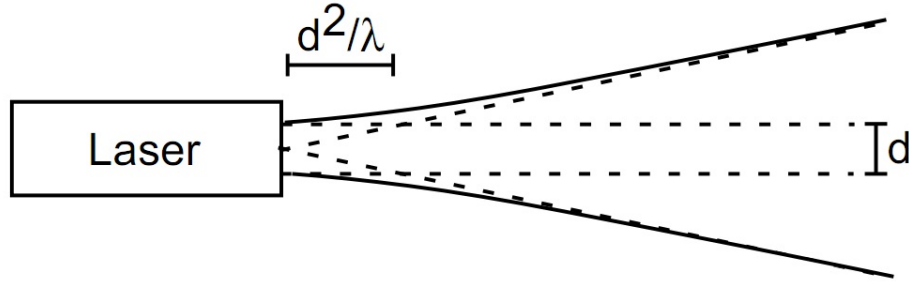


FIGURE 2.1 – Évolution du diamètre d’un faisceau laser. Pour un faisceau de diamètre d , la divergence due à la diffraction ne se manifeste qu’à partir d’une distance $z_R \sim d^2/\lambda$ de la source appelée longueur de Rayleigh.

mite de Fraunhofer, dans laquelle les phénomènes de diffraction sont en général présentés. La limite opposée est quant à elle la limite de Fresnel que nous discuterons brièvement.

Application au laser Terre-Lune

Dans le cas d’un laser typique, le diamètre du faisceau est de l’ordre du millimètre et de longueur d’onde d’un micron. La distance en dessous de laquelle on pourra supposer le faisceau comme collimaté est donc de l’ordre du mètre. Dans les applications courantes, on peut donc considérer le faisceau issu du laser comme parfaitement parallèle. Une application où cette divergence devient dramatique est la mesure de la distance Terre-Lune. Actuellement, cette mesure est réalisée par télémétrie laser : on envoie des impulsions lumineuses depuis la Terre vers la Lune et grâce à des miroirs déposés par les missions Appolo XI, XIV et XV et Lunakhod 17 et 21, la lumière est renvoyée vers les télescopes terrestres. La mesure du temps mis par la lumière pour réaliser l’aller-retour fournit alors une mesure précise de la distance Terre-Lune. Du fait de la divergence du faisceau, l’intensité de l’onde est considérablement diminuée au retour. Pour la maximiser, on agrandit le faisceau à l’aide d’un miroir de télescope de 1,5 m (celui du plateau de Calern en France, ainsi que d’autres situés au Japon, aux États-Unis et en Australie), ce qui donne un rayon du faisceau au niveau de la Lune de “seulement” 100 m. Bien que la divergence soit considérablement réduite, l’intensité lumineuse collectée au retour est extrêmement faible : à peine un photon tous les cents tirs ! Malgré cela, la précision des mesures est exceptionnellement bonne : la distance Terre-Lune est connue aujourd’hui au millimètre près, soit une précision relative de l’ordre de 10^{-11} .

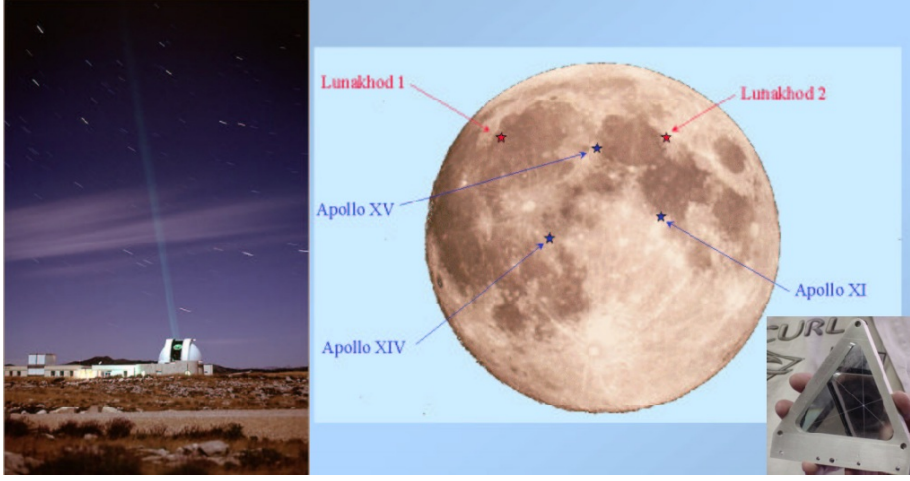


FIGURE 2.2 – À gauche, coupole du télescope abritant le laser Terre-Lune (Projet MéO – Métrologie Optique – de l’Observatoire de Côte d’Azur). À droite carte de la Lune indiquant l’emplacement des miroirs déposés sur la Lune. Insert : réplique d’un de ces miroirs.

2.2 Approximation de l’enveloppe lentement variable

Plus quantitativement, dans le vide le champ électrique est solution de l’équation d’onde $\square \mathbf{E} = 0$. Considérons le cas d’une onde se propageant dans la direction z et polarisée selon x pour laquelle on pose

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)}\mathbf{u}_x, \quad (2.2)$$

avec $\omega = kc$. \mathcal{E} est l’enveloppe du rayon lumineux dont le module décrit le profil du faisceau laser. Si l’on retranscrit l’équation d’onde en terme de \mathcal{E} , on constate que celle-ci vérifie l’équation

$$(\partial_z^2 + \nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)\mathcal{E} = 0, \quad (2.3)$$

où ∇_\perp désigne la projection du gradient dans le plan (x, y) . Comme nous l’avons vu dans l’analyse qualitative de la propagation du faisceau, l’échelle de variation dans la direction z est grande devant la longueur d’onde, ce qui fait que $k \gtrsim \partial_z \sim 1/z_R$. On peut par conséquent négliger le terme en ∂_z^2 devant celui en $k\partial_z$, ce qui permet de simplifier l’équation (2.3) sous la forme

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)\mathcal{E} = 0. \quad (2.4)$$

Cette équation est appelée *équation de l’enveloppe lentement variable* et est formellement équivalente à une équation de Schrödinger pour une particule libre

à deux dimensions (x, y) , à condition de faire le changement de variable $z \rightarrow t$, ce qui nous guidera dans sa résolution. En effet, dans le problème quantique, l'invariance par translation du problème suggère de résoudre l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions. Soit $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$. On définit donc la transformée de Fourier bidimensionnelle de \mathcal{E} par la relation

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = \int d^2\boldsymbol{\rho} \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.5)$$

Dans l'espace de Fourier, ∇_{\perp}^2 est représenté par $-q^2$, ce qui nous donne pour (2.4)

$$(2ik\partial_z - q^2) \tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.6)$$

Cette équation du premier ordre en z s'intègre alors sans difficulté et nous fournit par la suite

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = e^{-iq^2 z/2k} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0). \quad (2.7)$$

En repassant dans l'espace réel, on en déduit que

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-iq^2 z/2k} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.8)$$

En notant ensuite que $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0) = \int d^2\boldsymbol{\rho}' \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}'}$, on obtient

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{q} d^2\boldsymbol{\rho}'}{(2\pi)^2} e^{-iq^2 z/2k} e^{i\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')} \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (2.9)$$

Or, on peut récrire cette équation sous la forme

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2\boldsymbol{\rho}' \mathcal{G}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (2.10)$$

avec le noyau

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-iq^2 z/2k} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \quad (2.11)$$

On utilise le résultat de l'appendice 2.7.1 pour évaluer cette intégrale qui nous donne

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{k}{2i\pi z} e^{ik\rho^2/2z}. \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) traduit le Principe de Huygens dans l'approximation paraxiale. En effet, ce principe stipule que l'on peut obtenir le champ électrique en tout point de l'espace z à partir de celui dans le plan $z = 0$ en propageant des "ondelettes" sphériques secondaires (Fig. 2.3), ce qui se traduit mathématiquement par

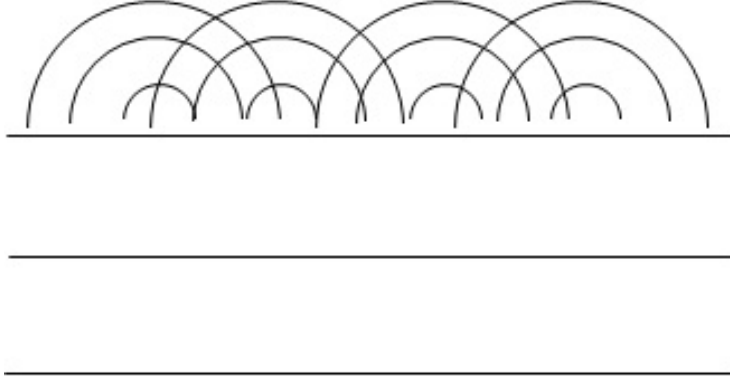


FIGURE 2.3 – Principe de Huygens : on peut décrire le comportement de la lumière par une propagation de proche en proche d’ondelettes sphériques secondaires.

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2 \boldsymbol{\rho}' \mathcal{G}_H(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (2.13)$$

où le noyau est à présent proportionnel à l’amplitude d’une onde sphérique, à savoir

$$\mathcal{G}_H(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.14)$$

et $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ désigne la distance entre la source de l’onde sphérique et le point d’observation. Plaçons nous comme précédemment dans l’approximation paraxiale qui revient à supposer $z \gg \rho$ puisque les “rayons” émis de chaque source secondaire sont peu inclinés sur l’axe optique. On a alors $r \sim |z| (1 + \rho^2/2z^2)$, ce qui nous permet de réexprimer \mathcal{G}_H comme

$$\mathcal{G}_H(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \frac{e^{ik|z|}}{|z|} e^{ik\rho^2/2|z|}. \quad (2.15)$$

2.3 Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

Comme nous venons de le voir, les équations (2.10) et (2.12) solutions de l’équation d’onde dans l’approximation paraxiale redonnent le Principe de Huygens et doivent par conséquent pouvoir décrire les phénomènes de diffraction. Le calcul explicite de l’intégrale (2.10) aboutit à deux régimes différents, suivant que l’on s’intéresse au champ électrique diffracté à courte distance (diffraction en champ proche, ou diffraction de Fresnel) ou à longue distance (diffraction en champ lointain ou diffraction de Fraunhofer).

2.3.1 Diffraction de Fraunhofer

Considérons un faisceau de taille transverse a supposée petite (nous préciserons le critère exact plus loin). Dans ce cas l'intégrale (2.10) ne porte que sur des valeurs de $\rho' \lesssim a$ et si l'on développe $(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2$ à l'ordre 1 inclus en ρ' , on peut faire l'approximation suivante

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) \sim \frac{ke^{ik\rho^2/2z}}{2i\pi z} e^{-ik\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'/z}. \quad (2.16)$$

D'après la relation (2.10), on en déduit que le champ diffracté vaut

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{ke^{ik\rho^2/2z}}{2i\pi z} \int d^2\boldsymbol{\rho}' \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0) e^{-ik\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'/z} \quad (2.17)$$

$$= \frac{ke^{ik\rho^2/2z}}{2i\pi z} \tilde{\mathcal{E}}(k\boldsymbol{\rho}/z). \quad (2.18)$$

On retrouve ici le fait que la figure de diffraction en champ lointain correspond à la transformée de Fourier du champ électrique initial pour un vecteur d'onde $\mathbf{q} = k\boldsymbol{\rho}/z$. Or d'après l'inégalité de Heisenberg, on sait que les largeurs en ρ et en q du champ $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z)$ sont liés par la condition $\Delta\rho\Delta q \geq 1/2$. Si l'on suppose que l'on se trouve proche de la saturation, on a donc $\Delta q \sim 1/a$ et la figure de diffraction a donc en z une largeur typique $\Delta\rho(z) \sim z/ka \sim z\lambda/a$, ce qui correspond à l'angle de diffraction de l'ordre de λ/a discuté dans la discussion qualitative du début de ce chapitre. Cet ordre de grandeur nous permet de préciser la condition de validité de la condition “ ρ' petit” dans le calcul du champ diffracté. En effet, pour que celle-ci soit valable, nous avons vu qu'il fallait que $\rho'/\rho \ll 1$. D'après les valeurs typiques de ρ' ($\sim a$) et ρ ($\sim z\lambda/a$), on en déduit que le critère de validité de l'approximation de Fraunhofer peut s'exprimer par la condition $a^2/z\lambda \ll 1$. Cette condition étant valide aux grandes valeurs de z , on comprend l'appellation de “champ lointain” donnée à ce régime¹.

2.3.2 Diffraction de Fresnel

Pour des raisons évidentes, la diffraction de Fresnel est aussi appelée *diffraction en champ proche*. Dans cette limite, on ne peut plus négliger la courbure des ondelettes de Huygens, ce qui interdit d'appliquer la formule de Fraunhofer. C'est aussi le régime où l'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable, comme on s'en convainc en revenant à l'introduction qualitative. En effet, dans la région proche du point de focalisation du laser, l'optique géométrique prédirait un faisceau de diamètre nul, alors qu'en réalité son diamètre est fini.

En l'absence de résultat général concernant le profil d'intensité dans le régime de champ proche, nous allons nous contenter de la discussion d'un cas particulier,

1. Remarquons que ce critère peut aussi s'écrire $z/a \gg a/\lambda$. Dans le régime $a/\lambda \gg 1$ où nous nous sommes placés dans le cadre de l'approximation paraxiale, ceci signifie que la distance z est nécessairement grande devant la taille de l'objet diffractant.

à la savoir le cas de la diffraction par une structure périodique, telle qu'un réseau de diffraction infiniment étendu. Si le réseau est réellement périodique, son extension est infinie, ce qui empêche d'entrer dans le régime de champ lointain.

Dans l'espace direct, le champ électrique transmis par le réseau est périodique et on note b sa période dans la direction x (on le suppose invariant par translation dans la direction y). On peut alors décomposer $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ en *série* de Fourier, soit

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n x/b}. \quad (2.19)$$

Si l'on calcule ensuite la transformée de Fourier de \mathcal{E} , on trouve que

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0) = 2\pi\delta(q_y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(q_x - 2\pi n/b), \quad (2.20)$$

où l'on a utilisé l'identité

$$\int e^{iqx} dx = 2\pi\delta(q). \quad (2.21)$$

Dans l'espace de Fourier, $\tilde{\mathcal{E}}$ est alors piqué autour de "pics" de Fourier centrés en $(q_x = q_n = 2\pi n/b, q_y = 0)$ qui donnent naissance aux pics de diffraction dans le champ lointain. À une distance z quelconque, on sait d'après la relation (2.7) que le champ électrique diffracté à une distance z est simplement déphasé dans le plan de Fourier avec

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = e^{-iq^2 z/2k} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0). \quad (2.22)$$

En utilisant la décomposition en série de Fourier de $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0)$ (Eq. 2.23), on en déduit que

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = 2\pi\delta(q_y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(q_x - q_n) e^{-iq_n^2 z/2k}. \quad (2.23)$$

On constate alors deux choses. Tout d'abord, $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z)$ est piqué autour des mêmes pics de Fourier que $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0)$ ce qui implique que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z)$ possède la même période spatiale que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ dans le plan (x, y) , comme on s'en convainc aisément en utilisant la transformée de Fourier inverse de (2.21). Par ailleurs, on constate que le facteur de phase apparaissant dans (2.23) se met sous la forme

$$e^{-2i\pi^2 n_x^2 z/kb^2}. \quad (2.24)$$

Plaçons nous alors en $z = mkb^2/\pi$, avec m entier. On voit qu'alors l'argument de l'exponentielle est égale à un nombre entier de fois $2i\pi$ pour toute valeur de n_x , impliquant ainsi une égalité entre le champ initial et le champ diffracté dans l'espace de Fourier, et par voie de conséquence dans l'espace direct : c'est

l'effet Talbot, découvert en 1836 par Henry Talbot qui observa l'existence de ces images d'un réseau de diffraction.

Notons que l'effet Talbot n'est valable que dans le régime de champ proche. Lorsque l'on s'éloigne du réseau d'une distance supérieure à sa taille, on finit par être sensible à ses dimensions finies. Dit autrement, les pics de $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0)$ ont en réalité une largeur $\Delta q \sim 1/Nb$, où N est le nombre de motifs du réseau. Sur le pic centré sur q_n , on attend donc un déphasage de l'ordre de $\sim q_n \Delta q z / k$. Pour que l'effet Talbot reste observable, il faut que ce déphasage reste petit devant 1 pour toutes les valeurs de n contribuant à la série de Fourier. Si l'on note n_c l'indice de Fourier typique au-delà duquel les termes de la série deviennent négligeable, on en déduit le critère

$$\frac{2n_c \pi z}{Nkb^2} \ll 1, \quad (2.25)$$

ce qui, au facteur n_c/N près correspond au critère de validité de l'approximation de champ proche.

Lorsque ce critère n'est plus valable, on passe dans le régime de Fraunhofer dont nous avons vu qu'il prédisait un champ électrique diffracté proportionnel à la transformée de Fourier de \mathcal{E} dont nous avons déterminé l'expression plus haut.

2.3.3 Application à l'holographie

Le principe de Huygens stipule que pour connaître le champ électromagnétique en tout point de l'espace, il suffit de le connaître sur un plan (ou une surface), le champ en un point extérieur se déduisant par la propagation d'ondes sphériques secondaires. Dans le principe, ceci permet donc de stocker sur une surface bidimensionnelle toute l'information nécessaire à la reconstruction de l'image d'un objet tridimensionnel. La photographie classique ne stocke que l'information sur l'intensité lumineuse et donc le module du champ électrique, ce qui explique qu'elle ne puisse pas rendre la profondeur d'une image réelle. Au contraire, l'holographie est un processus interférométrique permettant de reproduire à la fois le module et la phase d'un champ électrique, ce qui permet ainsi de créer des images tridimensionnelles.

Au delà de leur simple aspect ludique, les techniques holographiques ont d'importantes applications pratiques dont certaines seront développées à la fin de cette section. Les techniques interférentielles permettent par exemple de mesurer des déplacements égaux à une fraction de longueur d'onde (soit typiquement des fractions de micron) ce qui permet d'utiliser l'holographie dans l'étude des propriétés mécaniques des matériaux.

En pratique, on réalise un hologramme d'un objet tridimensionnel en divisant en deux le faisceau issu d'un laser. Un des deux faisceaux est diffusé par l'objet et on enregistre sur un film photographique l'interférogramme du faisceau référence avec la lumière diffusée (2.4.A). Afin de reconstruire l'image de l'objet, on éclaire le film à l'aide d'une lumière cohérente : nous allons alors montrer que la lumière

diffractionnée par le film est identique (dans une certaine limite que nous précisons) à celle issue de l'objet initial (2.4.B).

Pour comprendre pourquoi ces deux étapes permettent bien de reconstruire l'image tridimensionnelle de l'objet initial, on note $E_{\text{dif}}(x, y)$ et $E_{\text{ref}}(x, y)$, les champs électriques des ondes diffusées et de référence dans le plan (x, y) du film photographique. On pose alors

$$\begin{aligned} E_{\text{dif}} &= E_{\text{dif},0}(x, y) \cos(\omega t - \psi(x, y)) \\ E_{\text{ref}} &= E_{\text{ref},0} \cos(\omega t - \phi(x, y)), \end{aligned}$$

les pulsations des deux ondes étant identiques car les faisceaux sont issus de la même source. Notons que l'onde de référence est une onde plane et que son amplitude est prise indépendante de x et y . Si \mathbf{k} est son vecteur d'onde $\phi(x, y) = k_x x + k_y y$. La phase ϕ est donc reliée à l'inclinaison de l'onde de référence par rapport au film.

Le film photographique est sensible à l'intensité lumineuse totale avec laquelle il est éclairé. Après impression, sa transmission T vaut en un point (x, y)

$$T = 1 - 2\beta I_0(x, y), \quad (2.26)$$

où β est un paramètre et I_0 est l'intensité lumineuse avec laquelle le film est éclairé au point (x, y) donnée par

$$I_0(x, y) = \langle |E_{\text{dif}} + E_{\text{ref}}|^2 \rangle = \frac{1}{2} (E_{\text{dif},0}^2 + E_{\text{ref},0}^2 + 2E_{\text{ref},0}E_{\text{dif},0} \cos(\phi - \psi)).$$

Passons à la phase de reconstruction de l'image. On éclaire le film avec l'onde référence seule. Le champ transmis E_{rec} vaut TE_{ref} , soit

$$\begin{aligned} E_{\text{rec}}(x, y) &= E_{\text{ref}}(1 - \beta(E_{\text{dif},0}^2 + E_{\text{ref},0}^2)) \cos(\omega t - \phi) \\ &\quad - \beta E_{\text{ref}}^2 E_{\text{dif}}(x, y) (\cos(\omega t - \psi) + \cos(\omega t + \psi - 2\phi)). \end{aligned}$$

Le champ électrique se met donc sous la forme d'une somme de trois termes $E_{i=1,2,3}$ respectivement égaux à

$$\begin{aligned} E_1 &= -\beta E_{\text{ref},0}^2 E_{\text{dif},0}(x, y) \cos(\omega t - \psi) \\ E_2 &= E_{\text{ref},0}(1 - \beta(E_{\text{dif},0}^2 + E_{\text{ref},0}^2)) \cos(\omega t - \phi) \\ E_3 &= -\beta E_{\text{ref},0}^2 E_{\text{dif},0}(x, y) \cos(\omega t + \psi - 2\phi) \end{aligned}$$

et que nous allons chercher à interpréter

- Le champ E_1 est celui qui produit l'hologramme, puisqu'à un facteur près, il est identique au champ électrique diffusé par l'objet au niveau du film.

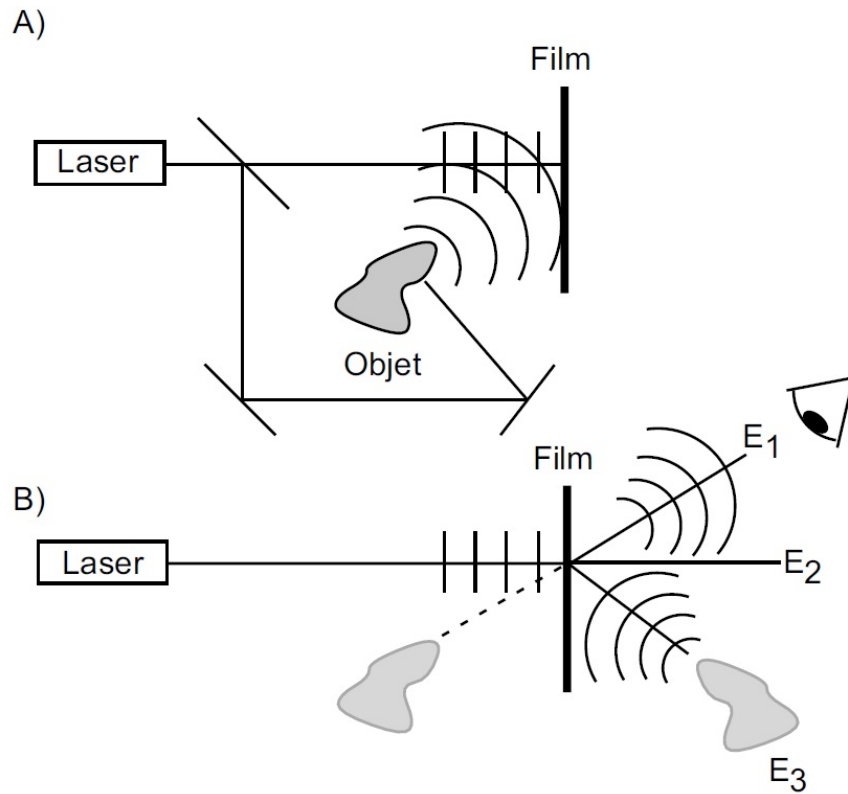


FIGURE 2.4 – Principe de l’holographie. A) Enregistrement : on sépare en deux le faisceau issu d’une source laser et un des faisceaux est diffusé par l’objet dont on souhaite obtenir l’hologramme. Les deux faisceaux sont ensuite recombinaés sur un film photographique qui stocke leur figure d’interférence. B) Lecture. On éclaire le film avec le faisceau de référence seul. La figure de diffraction due à la traversée du film fait apparaître trois rayons distincts : E_1 reconstruit l’image *virtuelle* de l’objet initial. C’est cette image qui constitue l’hologramme proprement dit. E_2 est le rayon transmis directement par le film. E_3 enfin reconstruit une image *réelle* de l’objet initial.

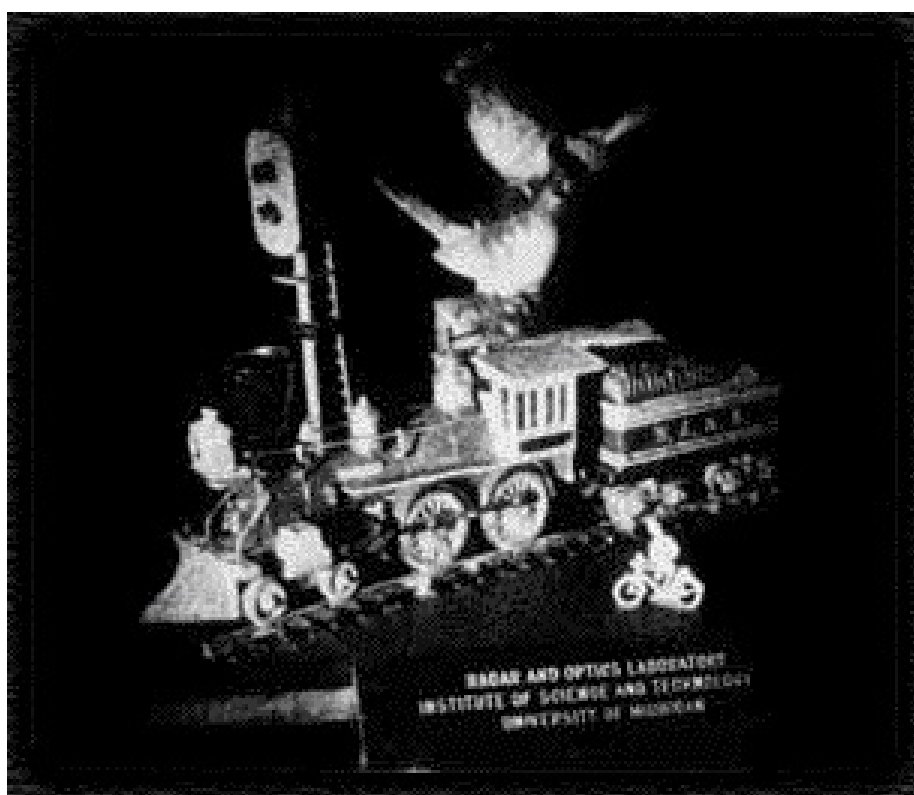


FIGURE 2.5 – *Train and Bird*, le premier hologramme de l'histoire, réalisé en 1964 par Emmeth Leith et Juris Upatnieks à l'université du Michigan.

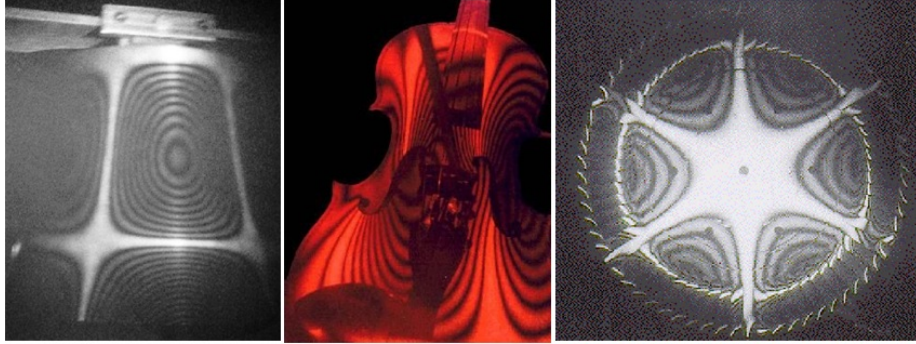


FIGURE 2.6 – Structures spatiales des modes de vibrations d’une cloche, d’un violon et d’un rotor de turbine, obtenues par holographie.

- Le champ E_2 possède la même phase ϕ que le champ de référence E_{ref} . Comme nous l’avons vu, cette phase est liée aux coordonnées du vecteur d’onde et indique donc la direction de propagation de l’onde. Le champ E_2 donne donc lieu à une onde se propageant dans la même direction que l’onde de référence, avec un profil d’amplitude spatiale modifié par la traversée du film.
- La structure de l’onde engendrée par le champ E_3 est un peu plus complexe que dans les deux premiers cas. Formellement, la phase $\cos(\omega t + \psi - 2\phi)$ est fonction de ψ et contient donc effectivement l’information de phase nécessaire à la reconstruction de l’objet, mais “dans le désordre”. En effet, la phase ϕ tout d’abord. Comme nous l’avons déjà vu, cette phase est associée à une onde se propageant selon la direction du faisceau de référence. Le champ E_3 va donc créer un faisceau incliné par rapport à l’image reconstruite par E_1 . Par ailleurs, si l’on omet ϕ , la phase n’est toujours pas la bonne, puisque le cosinus s’écrit $\cos(\omega t + \psi)$, au lieu de $\cos(\omega t - \psi)$. On peut cependant se ramener à cette deuxième forme en notant que

$$\cos(\omega t + \psi) = \cos(-\omega t - \psi) = \cos(\omega(-t) - \psi).$$

Autrement dit, E_3 possède la même phase que l’onde diffusée, à condition de changer t en $-t$, autrement dit de renverser le sens du temps. En terme moins “ésotérique”, ceci signifie que le champ E_3 va générer une image réelle de l’objet diffusant.

Applications : La principale application de l’holographie est la détection de petits mouvements, permettant ainsi l’étude de la réponse de matériaux à des vibrations acoustiques : l’atout de l’holographie provient de sa nature interférométrique, qui lui permet de détecter des mouvements de l’ordre d’une fraction de longueur d’onde, soit moins d’une centaine de nanomètres ! Une

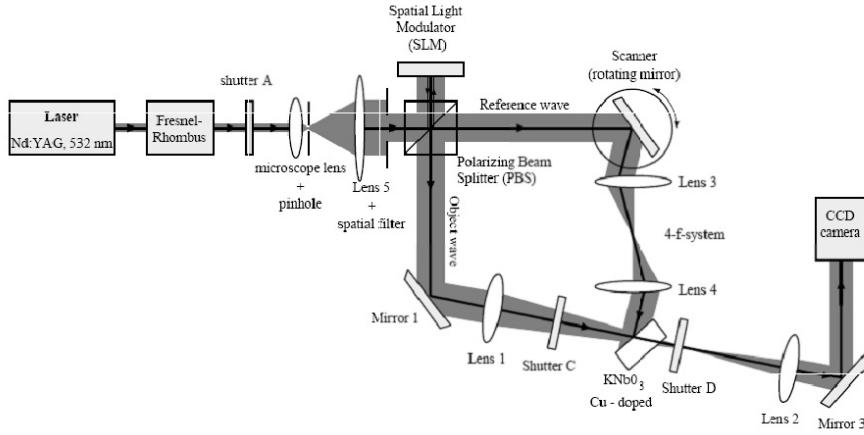
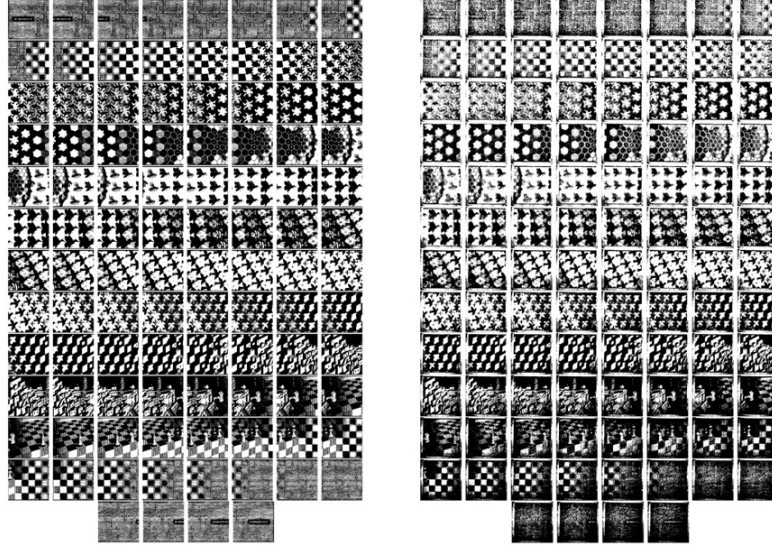


FIGURE 2.7 – Exemple de réalisation expérimentale d’une mémoire holographique. La série des métamorphoses de Escher est affichée sur l’écran à cristaux liquides (SLM). À chaque image, l’angle du miroir tournant miroir est modifié. La série des images est ensuite reconstruite en n’éclairant le cube qu’à l’aide de la référence et en tournant le cube pour faire apparaître les images l’une après l’autre sur la caméra (<http://www.crypto.ethz.ch/przydatek/hms.html>). On trouvera la série des images initiales et reconstruites dans les deux pages qui suivent.

technique utilisée est de procéder par moyenne temporelle : on enregistre l’hologramme alors que l’objet est en train de vibrer. Aux points où l’objet est immobile l’hologramme n’est pas perturbé et l’objet initial est reconstruit fidèlement. En revanche, aux points où l’objet vibre, les interférences entre la référence et la lumière diffusée se brouillent et on obtient des franges sombres lors de la reconstruction de l’hologramme (Fig. 2.6). Une deuxième technique, plus adaptée à une étude en temps réel, consiste à superposer l’objet vibrant à son hologramme figé. De nouveau, le mouvement de l’objet se manifeste par l’apparition de franges d’interférences lorsque l’on observe à travers le film.

Une seconde application, plus futuriste, est la réalisation de mémoires holographiques qui, à terme, pourraient remplacer les CD ou les DVD. Les cubes holographiques actuellement en développement permettent en effet de stocker de l’information en volume, et non plus en surface, comme cela est fait dans les supports usuels de l’information. Ce nouveau type de mémoire devrait permettre de stocker jusqu’à 1000 Go dans un cube de la taille d’un sucre en cube, ces données pouvant être récupérées à très grande vitesse (un DVD lu en 30 s) ! Dans ce dispositif, l’information à stocker est tout d’abord transformée en une série de pixels noirs et blancs (des 0 et des 1) d’un écran à cristaux liquides. Comme dans l’holographie classique, on effectue ensuite l’interférence d’un faisceau de référence avec la lumière diffusée par l’écran à cristaux liquide, à ceci



près que l'on réalise cette interférence non sur un film photographique, mais au sein d'un cube photoréfractif (KNbO_3 par exemple), dont l'indice est modifié de façon permanente par la lumière. Comme précédemment, la lecture de l'hologramme se fait en illuminant le cube à l'aide de la référence seule. Le point central est ici que l'angle d'incidence du faisceau de référence doit être strictement le même dans le cas de la lecture et de l'écriture. Plusieurs hologrammes différents peuvent par conséquent être stockés, en choisissant pour chacun un angle d'incidence différent pour le faisceau de référence.

2.4 Formation des images. Pouvoir de résolution d'un système optique

2.4.1 Modélisation d'une lentille mince, formule de conjugaison

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la propagation de la lumière à travers une lentille dans l'approximation paraxiale. En première approximation, l'effet de la lentille est d'imprimer au champ électromagnétique un déphasage dépendant de la distance à l'axe optique : pour une lentille convexe, plus on se trouve proche de l'axe optique, plus l'épaisseur de verre à traverser est grande et plus le déphasage est important. En d'autres termes, si l'on suppose la lentille placée en $z = z_0$ sur l'axe optique on aura

$$\mathcal{E}(x, y, z_0^+) = e^{i\phi(x,y)} \mathcal{E}(x, y, z_0^-). \quad (2.27)$$

2.4. FORMATION DES IMAGES. POUVOIR DE RÉOLUTION D'UN SYSTÈME OPTIQUE 15

Dans l'approximation paraxiale, on peut développer ϕ au voisinage de l'axe optique et si la lentille est invariante par rotation autour de l'axe optique, on pourra écrire $\phi(x, y) \simeq \phi(0, 0) - kb(x^2 + y^2)/2 + \dots$, où b est homogène à l'inverse d'une longueur dont on donnera l'interprétation plus loin. Afin d'alléger les notations, on considère le cas d'une lentille placée en $z_0 = 0$ et par choix de l'origine des temps, on prendra $\phi(0, 0) = 0$. Si l'on considère un objet en $z' < 0$ décrit par un champ électrique $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z')$, le champ électrique en $z > 0$ est donné par la propagation de z' à la lentille, le déphasage au niveau de la lentille puis la propagation jusqu'au point z , soit²

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2 \boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z') \quad (2.28)$$

avec le noyau

$$\mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{k^2}{(2\pi)^2 z z'} \int d^2 \boldsymbol{\rho}'' e^{ik(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'')^2/2z} e^{i\phi(\boldsymbol{\rho}'')} e^{-ik(\boldsymbol{\rho}'' - \boldsymbol{\rho}')^2/2z'} \quad (2.29)$$

Si l'on développe l'argument de l'exponentielle, on constate que ce noyau peut s'écrire

$$\mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{k^2 e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')/2}}{(2\pi)^2 z z'} \int d^2 \boldsymbol{\rho}'' e^{ik\rho''^2(1/z - 1/z' - b)/2} e^{ik\boldsymbol{\rho}'' \cdot (\boldsymbol{\rho}'/z' - \boldsymbol{\rho}/z)}. \quad (2.30)$$

On constate que lorsque

$$1/z - 1/z' = b, \quad (2.31)$$

le terme quadratique dans l'intégrale s'annule, et $\mathcal{K}_{zz'}$ s'écrit alors à un facteur de phase près

$$\mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \propto \frac{k^2}{z z'} \delta(k(\boldsymbol{\rho}'/z' - \boldsymbol{\rho}/z)) \propto \frac{z'}{z} \delta(\boldsymbol{\rho}' - z' \boldsymbol{\rho}/z). \quad (2.32)$$

L'équation (2.28) se simplifie alors en

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{z'}{z} \mathcal{E}(z' \boldsymbol{\rho}/z, z'). \quad (2.33)$$

On voit que si la condition (2.31) est remplie alors le champ en z est identique à celui en z' à un facteur d'échelle z/z' . En terme d'optique géométrique, ceci correspond à la conjugaison des plans z' et z . Si l'on compare (2.31) avec la relation de conjugaison pour une lentille mince, on voit alors sans difficulté que $1/b$ s'interprète comme la focale de la lentille. De même, le grandissement z/z' est identique à celui prédit par le théorème de Thalès dans le cadre de l'optique géométrique.

2. Mettons ici en garde le lecteur au sujet d'un conflit de notation : étant donné que l'on est amené à sommer dans le plan objet, on y "primera" les position, ce qui correspond malheureusement à la notation inverse de l'optique géométrique où les notations "prime" sont associées aux images.

2.4.2 Fonction d'étalement du point. Pouvoir de résolution d'un instrument optique.

Malgré l'aspect formel du paragraphe précédent, le noyau $\mathcal{K}_{zz'}$ a une interprétation relativement intuitive. Considérons en effet une source ponctuelle localisée en ρ'_0 . Ceci revient à considérer un champ électrique $\mathcal{E}(\rho', z') = a\delta(\rho' - \rho'_0)$ et donc

$$\mathcal{E}(\rho, z) = a\mathcal{K}_{zz'}(\rho, \rho'_0). \quad (2.34)$$

Autrement dit, \mathcal{K} représente le champ électrique créé dans le plan image par une source ponctuelle, dont le module carré³ est appelé la *fonction d'étalement du point*⁴.

Dans le cas que nous avons examiné au paragraphe précédent, nous avons vu que si la lentille se contente de déphaser le champ incident, alors \mathcal{K} est une fonction δ ce qui signifie que l'image d'un point est aussi un point (on a un stigmatisme parfait). Dans la réalité, on sait que ceci n'est pas vrai et que du fait de la diffraction l'image d'un point est en réalité une tache. Cet effet peut être incorporé en modifiant l'équation (2.27) décrivant l'effet de la lentille, en incorporant notamment le diamètre fini de celle-ci. On pose donc à présent

$$\mathcal{E}(x, y, z_0^+) = t(x, y)e^{i\phi(x, y)}\mathcal{E}(x, y, z_0^-), \quad (2.35)$$

où $t(x, y)$ est une fonction de transmission réelle décrivant l'absorption du faisceau incident – dans le cas le plus courant, il s'agit simplement d'une fonction porte coupant le faisceau au delà du rayon de la lentille.

L'analyse faite précédemment peut-être reprise à l'identique, et l'on trouve que le $\mathcal{K}_{zz'}$ dans le plan image s'écrit simplement

$$\mathcal{K}_{zz'}(\rho, \rho') = \frac{k^2 e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')}}{(2\pi)^2 zz'} \int d^2\rho'' t(\rho'') e^{ik\rho'' \cdot (\rho'/z' - \rho/z)}, \quad (2.36)$$

autrement dit, au facteur de phase près, la PSF est donnée par la transformée de Fourier de la fonction de transmission de la lentille.

Dans le cas d'une ouverture circulaire, $t(\rho) = \theta(R - \rho)$, où θ désigne la fonction de Heaviside et R est le rayon de la lentille, dont la transformée de Fourier s'exprime en fonction de la fonction de Bessel J_1 puisque l'on a⁵

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr e^{-ikr \cos \theta} = 2\pi R^2 \left(\frac{J_1(kR)}{kR} \right). \quad (2.37)$$

La PSF d'un objet placé sur l'axe optique et traversant une lentille est donc, à un facteur numérique près

3. Correspondant donc à l'intensité lumineuse

4. *Point Spread Function* (PSF) en anglais.

5. Pour plus de détails sur les fonctions de Bessel, voir par exemple le site MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>

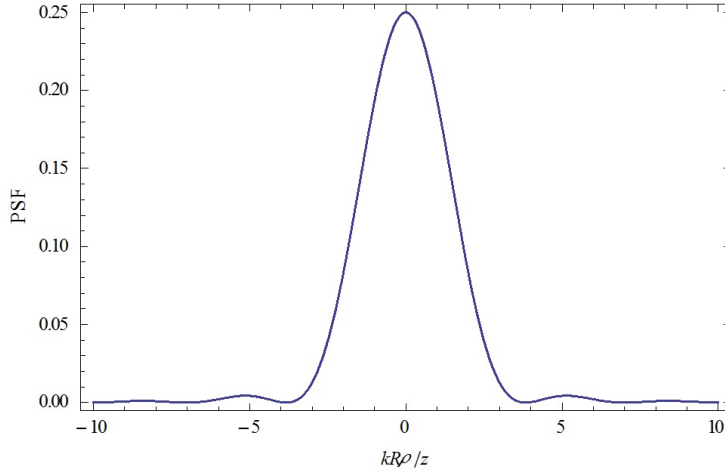


FIGURE 2.8 – Figure d’Airy donnant la fonction d’étalement du point d’une lentille de rayon R .

$$PSF(\rho) = \left(\frac{J_1(x)}{x} \right)^2, \quad (2.38)$$

avec $x = kR\rho/z$.

La figure correspondante est appelée figure d’Airy (Fig. 2.8). et la largeur de la tache de diffraction limite la résolution du système optique. On estime cette limite grâce au critère de Rayleigh qui considère que deux pics voisins ne peuvent être résolus si le maximum de l’un correspond au minimum de l’autre. Conventionnellement, on exprime ce critère en fonction du diamètre $D = 2R$ de la lentille. En utilisant la position du premier zéro de la fonction J_1 , on montre alors que la séparation maximale entre deux images permise par le critère de Rayleigh est $\Delta\rho = 1.22\lambda z/D$. En utilisant le théorème de Thalès, on peut donc séparer deux objets distants de $\Delta\rho' = 1.22\lambda z'/D$.

Le critère de Rayleigh est néanmoins trop restrictif et la connaissance précise de la PSF permet d’obtenir une précision bien meilleure. En effet, dans le cas idéal de données non bruitées, la connaissance parfaite de la PSF permet en principe en utilisant un algorithme d’ajustement de distinguer deux taches arbitrairement proches. En pratique, cependant, la PSF n’est qu’imparfaitement connue et les données expérimentales présentent du bruit. En conséquence, la résolution maximale est limitée à une fraction du critère de Rayleigh. On illustre cette possibilité sur la figure 2.9 extraite de la référence [2] où l’on a effectué l’image d’atomes refroidis par laser et piégés dans un potentiel périodique de pas 532 nm. La résolution de l’imagerie étant en principe de 700 nm, il devrait être impossible d’identifier la position des particules individuelles, comme on le voit sur les figures du haut. Cependant, en déconvoluant la PSF , il est finalement possible de détecter la position de chaque atome.

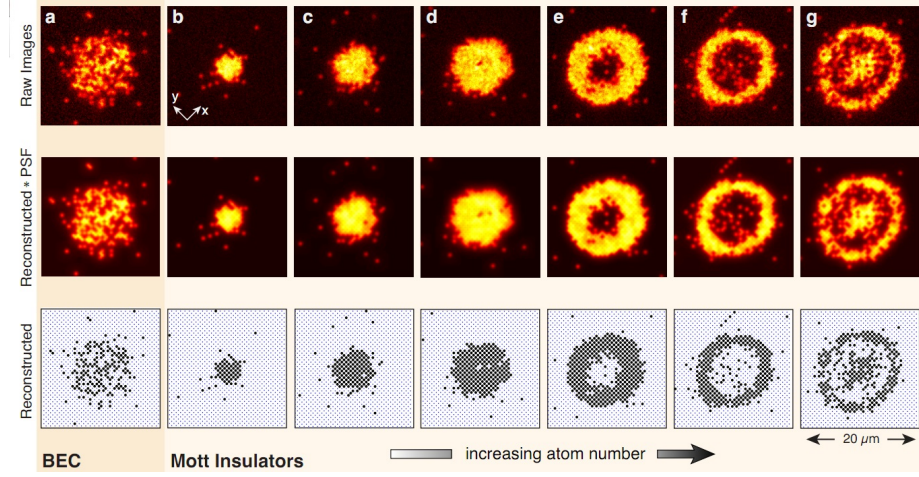


FIGURE 2.9 – En haut image d’un nuage d’atomes froids répartis dans un potentiel périodique de pas 532 nm. La résolution du système optique est de 700 nm. En utilisant la connaissance de la fonction d’étalement du point, il est possible de repérer chaque atome individuellement (Rangée du bas). La rangée du milieu représente le profil de densité recalculé à partir des positions des atomes et de la PSF. Figure extraite de [2].

2.4.3 Optique de Fourier et microscopie à contraste de phase

Comme nous venons de le voir, la propagation à longue distance d’un champ électrique donne accès à sa transformée de Fourier. Une façon de ramener le plan de Fourier à distance finie est de regarder dans le plan focal d’une lentille. En effet, dans ce cas, tous les rayons émis par la source dans une direction donnée sont focalisés en un unique point du plan focal. Nous pouvons retrouver ce résultat dans le cadre de l’optique ondulatoire en calculant le noyau $\mathcal{K}_{zz'}$ dans le cas où le point final se trouve dans le plan focal, c’est à dire en $z = f = 1/b$.

Repartons de l’expression générale (2.30) du noyau que l’on calcule à présent explicitement. En utilisant l’expression de l’intégrale gaussienne à deux dimensions (2.120), on trouve que

$$\mathcal{K}_{zz'} = \frac{ik e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')}}{2\pi z z' (1/z - 1/z' - b)} \exp \left[-i \frac{k(\rho'/z' - \rho/z)^2}{2(1/z - 1/z' - b)} \right]. \quad (2.39)$$

Dans le plan focal $z = 1/b$, cette expression se simplifie en

$$\mathcal{K}_{zz'} = -\frac{ik e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')}}{2\pi z} \exp \left[iz' k (\rho'/z' - \rho/z)^2 \right]. \quad (2.40)$$

Le champ électrique dans le plan focal est donc donné par

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2 \rho' \mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z') \propto \int d\boldsymbol{\rho}' e^{-ik\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}'/f} \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z'). \quad (2.41)$$

Au préfacteur près, le champ dans le plan focal est donc comme attendu donné par la transformée de Fourier du champ initial.

En agissant sur le faisceau dans le plan focal/de Fourier, il est possible de réaliser un certain nombre de traitements du signal lumineux permettant d'améliorer une image (comme dans le détramage⁶) ou même de faire apparaître des objets *a priori* invisibles comme dans la microscopie à contraste de phase qui est couramment utilisée en biologie ou biophysique : en effet, les composants de la cellule sont transparents et la microscopie classique qui mesure essentiellement l'absorption de l'objet étudié ne peut par conséquent en révéler ses constituants. Afin de contourner cette difficulté, il est possible d'utiliser des colorants se fixant plus favorablement à tel ou tel constituant cellulaire⁷. Ces colorants peuvent cependant se révéler toxiques pour la cellule et ne peuvent donc pas être utilisés lors d'études *in vivo*. Du point de vue optique, la cellule agit néanmoins comme une lame d'indice spatialement variable et la technique de contraste de phase (Zernike 1935) permet de visualiser le déphasage subi par la lumière lors de la traversée du milieu cellulaire (Fig. 2.13).

Le principe de son fonctionnement est relativement ingénieux et consiste à insérer une lame $\lambda/4$ au centre du plan focal/de Fourier. En effet, supposons que l'on éclaire l'objet de phase avec un faisceau collimaté et d'éclairement uniforme. Après la traversée de l'objet, le champ électrique est de la forme $E = E_0 e^{i\phi(x,y)}$, où ϕ désigne le déphasage produit par la traversée de l'objet. Afin de simplifier l'analyse, on suppose ϕ suffisamment petit pour faire l'approximation $E \sim E_0 (1 + i\phi)$. Dans le plan de Fourier, et en l'absence de la lame mince, le champ est proportionnel à la transformée de Fourier de E soit $E' \propto \delta(k_x, k_y) + i\hat{\phi}(k_x, k_y)$. Si $\hat{\phi}$ est suffisamment étendu, la présence de la lame mince sur l'axe optique déphase essentiellement la composante $k_x = k_y = 0$ du champ : après traversée de la lame, le champ devient $E'' \propto i\delta(k_x, k_y) + i\hat{\phi}(k_x, k_y)$. La propagation du plan focal au plan image effectue la transformée de Fourier inverse. On obtient alors dans le plan image $E_{\text{Im}} \propto i(1 + \phi)$. Si l'on s'intéresse à l'intensité lumineuse, on constate que celle-ci est simplement proportionnelle à $1 + 2\phi$, et est donc modulée par le déphasage.

2.4.4 Microscopie de fluorescence

La microscopie par contraste de phase est un outil puissant pour observer de "gros" objets, telles qu'un nuage d'atomes froids ou une cellule. Elle se révèle cependant insuffisante pour l'étude d'objets nanométriques dont la taille est plus petite que la longueur d'onde. Dans le cas particulier des objets biologiques, les

6. Il s'agit d'éliminer les raies régulièrement espacées apparaissant sur certaines photos ou illustrations dans les journaux.

7. C'est ce qui vaut leur nom aux chromosomes qui ne sont observables que grâce à des colorants.

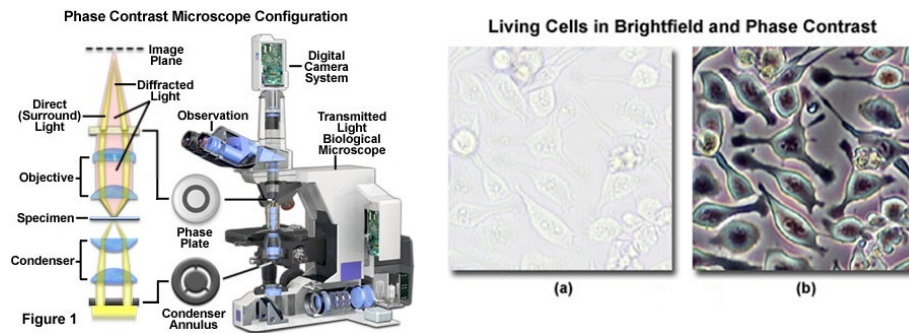


FIGURE 2.10 – Gauche : principe du microscope à contraste de phase. Droite : Exemple d’images prises en microscopie standard (a) et contraste de phase (b). Figures extraites de <http://www.microscopyu.com/articles/phasecontrast/index.html>.

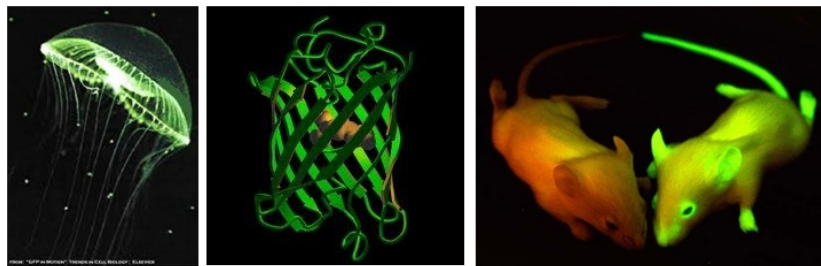


FIGURE 2.11 – De gauche à droite : Aequora Victoria, méduse fluorescente dont est extraite la GFP. Structure de la GFP. Souris modifiée génétiquement synthétisant la GFP.

progrès de la biochimie et du génie génétique permettent à présent de rendre ceux-ci visibles en leur greffant des fluorophores, sous la forme de protéines (par exemple la GFP – *Green Fluorescent Protein* – (Fig. 2.18) ou de boîtes quantiques fluorescentes (Voir chapitre ??). Grâce à ces techniques développées durant les vingt dernières années, il est à présent possible de réaliser des observations d’objets biologiques, tels que l’ADN ou des protéines, à l’échelle de la molécule unique.

Dans une expérience typique de fluorescence, on excite le milieu à l’aide d’un faisceau lumineux de longueur d’onde λ_{exc} qui permet d’exciter les fluorophores. Ceux-ci se désexcitent ensuite en émettant un photon de longueur d’onde λ_{flu} , en général plus grande que λ_{exc} en raison de l’élargissement vibra-rotationnel des états moléculaires. Un des inconvénients de la microscopie classique par fluorescence est l’émission d’une lumière de fluorescence tout le long de l’axe de propagation du faisceau d’excitation (Fig. 2.12). Si la profondeur de champ du microscope d’observation est trop grande, le détecteur collectera de la lumière

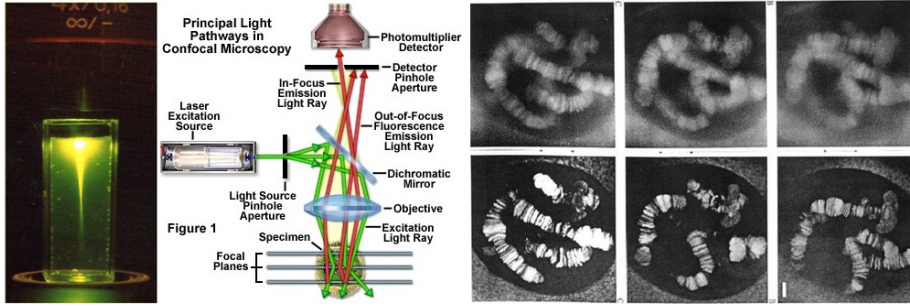


FIGURE 2.12 – De gauche à droite : Microscopie de fluorescence classique : la fluorescence (ici d’une solution de fluorescéine) est émise tout le long du trajet du faisceau d’excitation) ; Principe du microscope confocal : Image des chromosomes d’un noyau cellulaire en microscopie classique (en haut) et confocale (en bas).

provenant d’un grand volume spatial, ce qui brouillera l’image et empêchera la détection d’une molécule unique. Ce problème peut être contourné par l’utilisation du microscope confocal dans laquelle on focalise le faisceau d’excitation dans le milieu à étudier, et l’on collecte la lumière de fluorescence après passage après un diaphragme de filtrage spatial qui bloque l’essentiel de la lumière émise hors du foyer du faisceau d’excitation (Fig. 2.12).

2.5 De l’optique ondulatoire à l’optique géométrique

Les approximations nous ayant conduit à l’équation de l’enveloppe lentement variable reposent sur l’hypothèse d’une longueur d’onde petite devant les dimensions caractéristiques (col et longueur de Rayleigh) du faisceau lumineux. Cette hypothèse étant aussi celle régissant l’optique géométrique, nous pouvons appliquer le même type de procédure pour retrouver les lois de la propagation d’un faisceau lumineux dans un milieu inhomogène.

2.5.1 Approximation eikonale

En anticipant sur la suite du cours, un milieu linéaire et isotrope se décrit par une densité volumique de polarisation $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, où χ est un nombre sans dimension caractérisant la polarisabilité diélectrique du milieu que l’on supposera réelle (autrement dit le milieu est non absorbant). Ce vecteur polarisation induit une densité de charge $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ et de courant $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \partial_t \mathbf{P}$. Dans le cas d’un milieu inhomogène, la polarisation dépend de la position et en l’absence de charge libre, les équations de Maxwell s’écrivent

$$\nabla \cdot ((1 + \chi)\mathbf{E}) = 0 \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.43)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.44)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 (1 + \chi) \partial_t \mathbf{E}. \quad (2.45)$$

On cherche des solutions sous la forme d'une onde monochromatique dont on écrit le champ électrique en notations complexes sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i(\phi(\mathbf{r}) - \omega t)}. \quad (2.46)$$

On effectue comme précédemment l'approximation de l'enveloppe lentement variable dans laquelle on suppose que \mathcal{E} et χ varient sur des échelles de longueur caractéristiques L grandes devant la longueur d'onde. En revanche, comme pour une onde plane on aurait $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ et donc $\nabla \phi = \mathbf{k}$, l'échelle de longueur caractéristique de variation de ϕ est la longueur d'onde. Cette séparation des échelles nous permet dans les équations de Maxwell de négliger les variations spatiales de \mathbf{E}_0 et de χ devant celles de ϕ ce qui nous permet de simplifier les équations de Maxwell sous la forme

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.47)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.48)$$

$$\nabla \phi \wedge \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (2.49)$$

$$\nabla \phi \wedge \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} (1 + \chi) \mathbf{E}_0, \quad (2.50)$$

où l'on a posé $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{i(\phi(\mathbf{r}) - \omega t)}$ dont l'amplitude \mathbf{B}_0 obéit à l'hypothèse de variation spatiale lente. Si l'on identifie $\nabla \phi$ avec un vecteur d'onde local de l'onde, on voit d'après les trois premières équations que l'onde possède localement la même structure qu'une onde plane avec \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 et $\nabla \phi$ formant un trièdre direct. Par ailleurs, en utilisant les deux dernières équations on obtient que

$$(\nabla \phi)^2 = (1 + \chi) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.51)$$

Si l'on identifie de nouveau $\nabla \phi$ avec un vecteur d'onde local, cette équation s'interprète comme l'existence d'une vitesse de phase locale $v_{\text{loc}} = \omega / |\nabla \phi| = c / \sqrt{1 + \chi}$. Par définition de l'indice optique n , on a par conséquent $n(\mathbf{r})^2 = (1 + \chi)$ ce qui permet de récrire l'équation (2.51) comme

$$\nabla \phi = n(\mathbf{r}) \frac{\omega}{c} \mathbf{u}, \quad (2.52)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ est le vecteur unitaire porté par $\nabla \phi$.

L'onde étant localement plane, le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$ est porté par le "vecteur d'onde" $\nabla \phi$. Comme le vecteur de Poynting indique la direction de propagation de l'énergie, les rayons lumineux sont localement tangents à $\nabla \phi$ et forment donc les lignes de champ de $\nabla \phi$. Plus précisément, considérons un

rayon lumineux suivant un trajet $\mathbf{r}(s)$ paramétré par l'abscisse curviligne s . Le vecteur tangent $d\mathbf{r}/ds$ satisfait donc la condition

$$\frac{d\phi(\mathbf{r}(s))}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{r}(s)). \quad (2.53)$$

Considérons l'équation (2.52) sur un rayon lumineux. On a alors

$$\nabla\phi(\mathbf{r}(s)) = n(\mathbf{r}(s))\frac{\omega}{c}\mathbf{u}(\mathbf{r}(s)). \quad (2.54)$$

Si l'on dérive cette équation par rapport à l'abscisse curviligne, on trouve que

$$\frac{d}{ds} [\nabla\phi(\mathbf{r}(s))] = \frac{\omega}{c} \frac{d(n\mathbf{u})}{ds}, \quad (2.55)$$

En utilisant les formules de dérivation pour les fonctions composées et en notant que ϕ dépend de s uniquement *via* sa dépendance en \mathbf{r} , on obtient

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla\right) \nabla\phi = \frac{\omega}{c} \frac{d(n\mathbf{u})}{ds}, \quad (2.56)$$

soit

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla\right) (n\mathbf{u}) = \frac{d(n\mathbf{u})}{ds}, \quad (2.57)$$

Utilisons la relation vectorielle $(\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla(v^2)/2$ pour $\mathbf{v} = n\mathbf{u}$. Puisque \mathbf{v} est un gradient et \mathbf{u} est unitaire, on obtient

$$\frac{d(n\mathbf{u})}{ds} = \nabla n. \quad (2.58)$$

L'équation (2.58) (ou équation eikonale⁸) constitue l'équation fondamentale de l'optique géométrique et permet de calculer la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu homogène arbitraire. Avant d'étudier le cas de l'approximation paraxiale et faire le lien avec les résultats obtenus dans le cadre de l'optique ondulatoire, étudions le cas simplifié d'un milieu stratifié pour lequel n ne dépend que de z . Si l'on projette l'équation (2.58) dans les directions x et y on constate que les composantes x et y de $n\mathbf{u}$ sont constantes. Par une rotation éventuelle des axes x et y , on peut supposer $u_y = 0$ en $s = 0$ et par suite pour tout s : le rayon se propage donc dans un plan orthogonal à l'axe y . Si l'on note θ l'angle entre le vecteur tangent et la direction z , on a $u_x = \sin\theta$, ce qui nous donne donc

$$n(\mathbf{r}) \sin\theta = \text{cte}. \quad (2.59)$$

On a ainsi retrouvé les relations de Descartes pour la réfraction.

8. Du grec $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$, image, qui a donné icône en français.

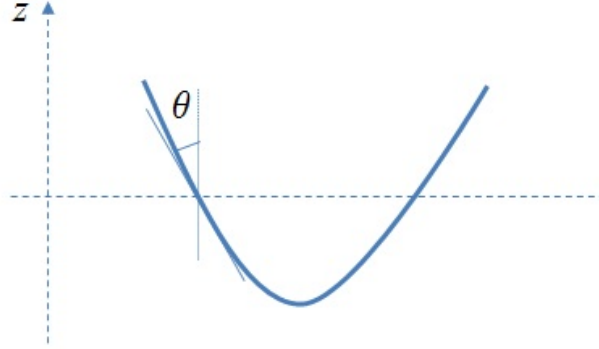


FIGURE 2.13 – Propagation dans un milieu stratifié où l’indice n ne dépend que de z . On note θ l’angle entre le rayon et l’axe z .

2.5.2 Principe de Fermat

Avant de l’étudier dans quelques cas particuliers remarquons la similitude existant entre l’équation (2.59) et le principe fondamental de la dynamique pour une particule matérielle. En effet, effectuons le changement de variable $ds = ndt$. On peut alors réécrire l’équation (2.58) comme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = n\nabla n = \nabla\left(\frac{n^2}{2}\right). \quad (2.60)$$

Autrement dit, on retrouve ici l’équation du mouvement d’une particule de masse $m = 1$ évoluant dans un potentiel $V(\mathbf{r}) = -n^2(\mathbf{r})/2$. Cette constatation n’est en réalité qu’à moitié surprenante. En effet, tout comme l’optique géométrique, la mécanique classique est la limite d’une théorie ondulatoire (la mécanique quantique) lorsque la longueur d’onde de de Broglie tend vers zéro. Dans le cadre de la mécanique ondulatoire on peut d’ailleurs retrouver la mécanique classique par une approximation assez similaire à l’approximation eikonale, qui dans ce contexte porte le nom d’approximation WKB (pour Wenzel-Kramers-Brillouin).

Si l’on pousse plus loin l’analogie, on sait que les équations de la mécanique newtonienne peuvent se dériver d’un principe variationnel dans lequel on minimise l’action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{mv^2}{2} - V(\mathbf{r}) \right] dt. \quad (2.61)$$

associée aux trajectoires liant deux points A_1 et A_2 entre les instants t_1 et t_2 . On peut donc formellement retrouver la trajectoire d’un rayon lumineux en minimisant une “action”

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{n^2}{2} \right] dt. \quad (2.62)$$

Si l'on paramètre la courbe par son abscisse curviligne on trouve que

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] nds. \quad (2.63)$$

Comme, par définition de l'abscisse curviligne, $d\mathbf{r}/ds$ est un vecteur unitaire, ceci s'écrit simplement comme

$$S = \int_{s_1}^{s_2} nds. \quad (2.64)$$

Or S/c n'est rien d'autre que le temps mis par le rayon pour parcourir le trajet A_1A_2 . On a ainsi démontré le Principe de Fermat - ou Principe de moindre temps. Le trajet effectivement suivi par la lumière entre deux points minimise⁹ le temps mis pour parcourir le trajet.

2.5.3 Équation des rayons lumineux dans l'approximation paraxiale

Dans l'approximation paraxiale, on fait l'hypothèse de l'existence d'un axe optique autour duquel l'indice est invariant par rotation. Si l'on prend l'axe z selon l'axe optique, l'indice n est une fonction de z et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ uniquement. Par ailleurs, on suppose que les faisceaux considérés sont peu inclinés et proche de l'axe optique. Ceci permet tout d'abord de développer n au voisinage de $r = 0$. Par symétrie $r \rightarrow -r$, on a $n'(r=0) = 0$ et donc $n(r, z) = n_0(z) + n_2(z)r^2/2$, avec $n_2(z) = n''(r=0, z)$ et $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}_z$, où \mathbf{u}_z est le vecteur unitaire porté par l'axe z (autrement dit, $u_x, u_y \ll u_z$). Considérons le cas particulier d'un rayon se propageant dans le plan $y = 0$. Si l'on développe à l'ordre dominant la projection sur x de l'équation eikonale (2.58), on obtient alors

$$\frac{d(n_0(z)u_x)}{dz} = xn_2(z)\frac{dx}{dz} = u_x \quad (2.65)$$

où l'on a par ailleurs utilisé l'approximation $ds \sim dz$. Les équations eikonales peuvent donc se mettre sous la forme d'un système linéaire 2×2 de la forme

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} x \\ n_0(z)u_x \end{pmatrix} = M(z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ n_0(z)u_x \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

avec

$$M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1/n_0(z) \\ n_2(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

9. En réalité rend stationnaire

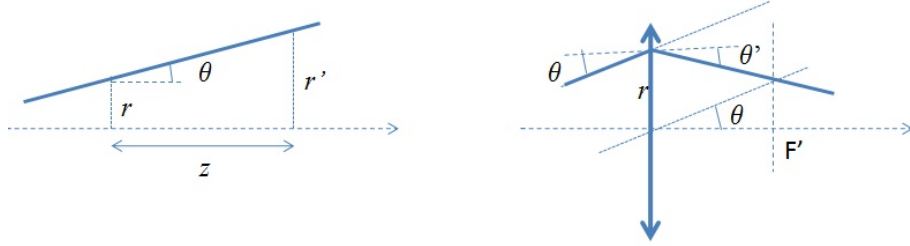


FIGURE 2.14 – Propagation dans un milieu homogène (gauche) et à travers une lentille (droite).

Ce système étant linéaire, il existe une relation linéaire entre les valeurs de $(x, n_0 u_x)$ en $z = 0$ et en z quelconque que l'on écrit formellement

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ n_0(z)u_x(z) \end{pmatrix} = R(z) \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ n_0(0)u_x(0) \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

La matrice $R(z)$ (appelée matrice *résolvante*) caractérise complètement les propriétés optiques du milieu traversé, puisque connaissant les conditions initiales pour le rayon en $z = 0$ (décalage et inclinaison par rapport à l'axe optique) on en déduit celles en z . Elle est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dR}{dz} = M(z) \cdot R(z), \quad (2.69)$$

avec la condition initiale $R(0) = \text{Id}$.

La matrice R est de déterminant égal à 1. En effet, On a d'après l'équation (2.69),

$$R(z + dz) = R(z) + M(z) \cdot R(z)dz = (\text{Id} + M(z)dz) \cdot R(z). \quad (2.70)$$

En prenant le déterminant de l'équation, on a

$$\det [R(z + dz)] = \det (\text{Id} + M(z)dz) \cdot \det(R(z)). \quad (2.71)$$

Or, en développant le déterminant à l'ordre 1 en dz , on a $\det (\text{Id} + M(z)dz) = 1 + \text{Tr}(M)dz$ (cette propriété est vraie quelle que soit la dimension n de l'espace, mais on peut la vérifier explicitement dans le cas $n = 2$). On en déduit donc que

$$\frac{d(\det R)}{dz} = \text{Tr}(M) \cdot \det R. \quad (2.72)$$

Comme $\text{Tr}(M) = 0$, on en déduit que le déterminant de R est constant et puisque $R(0) = \text{Id}$, celui-ci est égal à 1.

Calculons R dans quelques cas particuliers :

Propagation dans le vide

On a alors (Fig. 2.14) $\theta \sim u_x$ constant et $x(z) = x(0) + z \tan \theta \sim x(0) + zu_x(0)$. On en déduit donc que

$$R(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \mathcal{P}_z. \quad (2.73)$$

Propagation à travers une lentille mince

On considère (Fig. 2.14) le passage au travers d'une lentille entre $z = 0^-$ (état initial) et $z = 0^+$ (état final). La lentille étant mince, le décalage par rapport à l'axe optique n'est pas modifié par la traversée de la lentille. On a donc $x(0^+) = x(0^-)$. Par ailleurs, comme tous les rayons incidents inclinés du même angle par rapport à l'axe optique convergent au même point du plan focal, on a

$$x + f \tan(\theta(0^+)) = f \tan(\theta(0^-)), \quad (2.74)$$

Dans l'approximation paraxiale, on a $\sin \theta \sim \tan \theta$ et donc

$$R(0^+) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \mathcal{L}_f. \quad (2.75)$$

Fibre optique à gradient d'indice

Les fibres optiques sont des fibres de silice possédant un indice inhomogène piégeant la lumière et permettant de propager celle-ci sur de longues distances. Dans une description schématique, correspondant au cas particulier des fibres à gradient d'indice, on suppose que l'indice varie continûment avec r , de façon à ce que $n(r)$ possède un maximum en $r = 0$. D'après l'analogie avec la mécanique, on voit que l'énergie potentielle effective $-n^2$ possède un minimum en $r = 0$, ce qui permet de piéger les rayons au voisinage de l'axe optique.

On peut décrire plus quantitativement la propagation de la lumière dans une telle fibre en la découpant en tranches de longueur dz . À la propagation proprement dite, s'ajoute un déphasage $\delta\phi = kgr^2 dz$, où g caractérise la variation radiale de l'indice et peut d'après ce qui précède être associé à une focale $f = 1/g dz$. La propagation dans la tranche dz va donc être décrite par une matrice ABCD produit de \mathcal{P}_{dz} et $\mathcal{L}_{1/g dz}$, soit en développant à l'ordre 1 en dz

$$R(dz) = \mathbb{I} + dz \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Pour obtenir la propagation sur une distance z finie, on divise celle-ci en $N = z/dz$ intervalles, de sorte que

$$R(z) = R(dz)^{z/dz}. \quad (2.77)$$

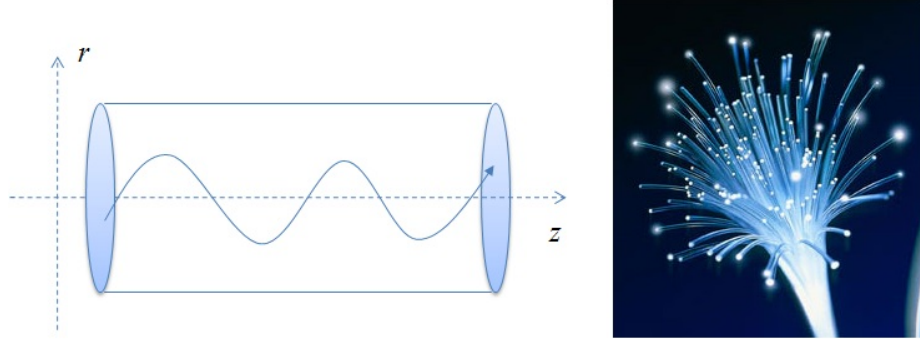


FIGURE 2.15 – Principe de la fibre optique à gradient d'indice : un gradient d'indice transverse permet de maintenir les rayons lumineux proches de l'axe optique.

En notant que $R(dz)^{z/dz} = \exp[z/dz \ln R(dz)]$, et en développant le logarithme, on en déduit que

$$R(z) = \exp \left[z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp [z\sqrt{g}G] \quad (2.78)$$

où la matrice G est définie par

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2} \\ -g^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

et satisfait la condition $G^2 = -\mathbb{I}$. Cette dernière propriété nous permet de voir que $G^{2n} = (-1)^n \mathbb{I}$ et $G^{2n+1} = (-1)^n G$. Si l'on développe en série l'exponentielle apparaissant dans (2.78), on voit immédiatement que

$$R(z) = \cos(\sqrt{g}z)\mathbb{I} + \sin(\sqrt{g}z)G. \quad (2.80)$$

En revenant à la définition de R , on en déduit que la distance à l'axe de la fibre évolue comme

$$x(z) = \cos(\sqrt{g}z)x(0) + \sin(\sqrt{g}z)n_0(0)u_x(0)/\sqrt{g}, \quad (2.81)$$

et reste donc comme attendu piégé au voisinage de l'axe optique.

De nos jours, les fibres optiques sont utilisées intensivement par l'industrie des télécommunications pour le transport optique de l'information : la lumière est en effet moins sujette aux perturbations électromagnétiques, et en l'absence d'effet Joule, les pertes y sont moins importantes. Une des limitations actuelles au transport sur de longues distance est l'existence de radicaux hydroxyles piégés dans la silice qui sont responsables de pics d'absorption vers 1.4 et 1.7 microns. En combinaison avec l'utilisation de laser émettant dans la fenêtre de transparence à 1.5 microns, l'utilisation d'amplificateurs de lumière permet cependant de propager des informations numériques sur de grandes distances : Il existe ainsi

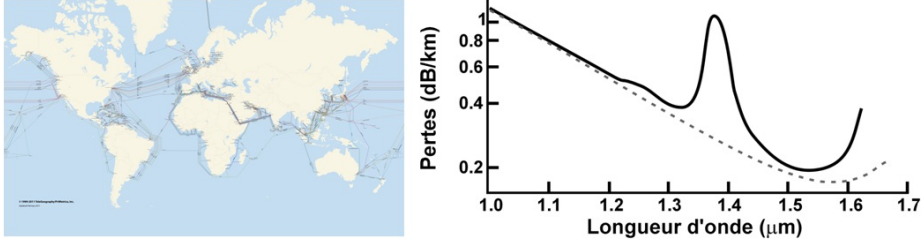


FIGURE 2.16 – À gauche : carte des câbles de télécommunication sous-marins (source <http://www.telegeography.com>). À droite : absorption d'une fibre optique. Les télécommunications utilisent la fenêtre de transparence située autour de 1.5 microns.

depuis 1988 des fibres optiques transatlantiques reliant l'Europe à l'Amérique (Fig. 2.16).

2.6 Faisceaux gaussiens

2.6.1 Faisceau limité par la diffraction

Dans la discussion de l'approximation de Fraunhofer, nous avons montré qu'un faisceau de profil transverse de largeur typique $\Delta\rho \sim a$ diffractait dans le champ lointain avec un angle $\alpha \sim \lambda/a$ donné par la largeur de la transformée de Fourier du champ électrique en $z = 0$, et donc limité par la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta\rho\Delta q \gtrsim 1$. Dans cette partie, nous allons chercher à caractériser les faisceaux les plus collimatés", c'est-à-dire ceux qui, à diamètre fixé, divergent le moins possible à longue distance.

Pour commencer, notons qu'une onde électromagnétique physique réaliste portant une puissance finie, l'enveloppe $\mathcal{E}(\rho)$ doit être de carré sommable, et on peut donc définir le produit scalaire

$$\langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 \rangle = \int d^2\rho' \mathcal{E}_1^*(\rho') \mathcal{E}_2(\rho'). \quad (2.82)$$

Par analogie avec le problème quantique équivalent, on définit des opérateurs position $\hat{\rho}$ et impulsion \hat{q} par

$$\langle \rho | \hat{\rho} | \mathcal{E} \rangle = \rho \mathcal{E}(\rho) \quad (2.83)$$

$$\langle \rho | \hat{q} | \mathcal{E} \rangle = -i \nabla_{\perp} \mathcal{E}(\rho), \quad (2.84)$$

ces opérateurs satisfaisant la relation de commutation $[\hat{\rho}_{\alpha}, \hat{q}_{\beta}] = i\delta_{\alpha,\beta}$, où $\hat{\rho}_{\alpha}$ et \hat{q}_{β} désignent les coordonnées α et β des opérateurs vectoriels $\hat{\rho}$ et \hat{q} . Les dimensions transverses sont alors définies par

$$\Delta\rho_\alpha^2 = \langle \mathcal{E} | \hat{\rho}_\alpha^2 | \mathcal{E} \rangle / \langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle \quad (2.85)$$

$$\Delta q_\alpha^2 = \langle \mathcal{E} | \hat{q}_\alpha^2 | \mathcal{E} \rangle / \langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle, \quad (2.86)$$

où le facteur $\langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle$ normalise le champ électrique à l'unité pour le produit hermitien considéré. D'après les inégalités de Heisenberg correspondante (Eq. 2.124 pour $\hat{A} = \hat{q}_\alpha$ et $\hat{B} = \hat{\rho}_\alpha$), on a bien

$$\Delta\rho_\alpha \Delta q_\alpha \geq 1/2. \quad (2.87)$$

Par ailleurs, d'après (2.125), ce critère est saturé pour un champ \mathcal{E} satisfaisant la condition

$$\left(\hat{q}_\alpha - \frac{i}{2\Delta\rho_\alpha^2} \hat{\rho}_\alpha \right) | \mathcal{E} \rangle = 0. \quad (2.88)$$

Dans l'espace des positions, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_\alpha} + \frac{\rho_\alpha}{2\Delta\rho_\alpha^2} \mathcal{E} = 0, \quad (2.89)$$

qui s'intègre ensuite comme

$$\mathcal{E} = \text{cte} \times e^{-\rho_\alpha^2/4\Delta\rho_\alpha^2}, \quad (2.90)$$

où la constante dépend de $\rho_{\beta \neq \alpha}$. Si l'on prend en compte les deux dimensions transverses, on obtient finalement un profil gaussien¹⁰ de la forme

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{E}_0 e^{-(\rho_x^2/w_{x,0}^2 + \rho_y^2/w_{y,0}^2)/4}, \quad (2.91)$$

où l'on pose conventionnellement $w_{\alpha,0} = 2\Delta\rho_\alpha$, que l'on baptise le col (ou *wais*) du faisceau. La relation précédente donne le profil du champ électrique en $z = 0$ et intéressons nous à présent à la propagation du champ pour $z \neq 0$. Pour cela, utilisons la formule intégrale (2.10) qui nous donne

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \mathcal{E}_0 \frac{k}{2i\pi z} \prod_\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho'_\alpha e^{-\rho'^\alpha{}^2/w_{\alpha,0}^2} e^{ik(\rho_\alpha - \rho'_\alpha)^2/2z} \right) \quad (2.92)$$

L'intégrale sur ρ'_α est une intégrale gaussienne dont le calcul est présenté dans l'appendice 2.7.1 et nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho'_\alpha e^{-\rho'^\alpha{}^2/w_{\alpha,0}^2} e^{ik(\rho_\alpha - \rho'_\alpha)^2/2z} = \sqrt{\frac{\pi}{1/w_\alpha^2 + k/2iz}} e^{-\frac{\rho_\alpha^2}{w_\alpha^2} \left(\frac{1}{1+2iz/kw_\alpha^2} \right)} \quad (2.93)$$

10. On peut noter que la gaussienne représente aussi l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Ceci n'est pas une surprise car l'équation (2.88) peut s'écrire $\hat{a}_\alpha | \mathcal{E} \rangle = 0$ avec $\hat{a}_\alpha = \hat{\rho}_\alpha / \sqrt{2\Delta\rho_\alpha} + i\sqrt{2\Delta\rho_\alpha} \hat{q}_\alpha$ qui possède les propriétés d'un opérateur d'annihilation.

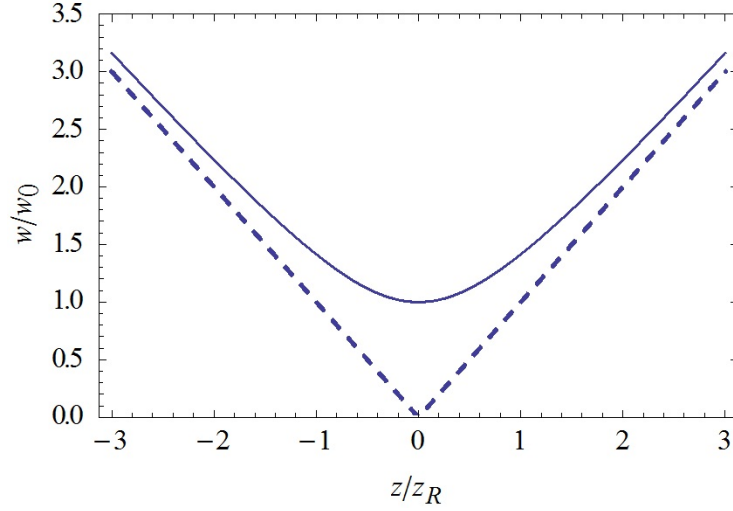


FIGURE 2.17 – Évolution du diamètre d'un faisceau gaussien : pour $z \ll z_R = \pi w_0^2/\lambda$, le diamètre reste constant égal à w_0 . Pour $z \gg z_R$ on entre dans le régime de champ lointain et le faisceau s'“auto-diffracte”.

On pose $z_{R\alpha} = kw_\alpha^2/2$, baptisé longueur de Rayleigh, et $q_\alpha(z) = z + iz_{R\alpha}$. Le champ électrique en z a donc pour expression

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \mathcal{E}_0 \prod_\alpha \left[\sqrt{\frac{k}{2q_\alpha(z)}} e^{-ik\rho_\alpha^2/2q_\alpha(z)} \right]. \quad (2.94)$$

L'intensité du faisceau est proportionnelle à $|\mathcal{E}|^2$, ce qui nous donne

$$I(\boldsymbol{\rho}, z) \propto e^{-2\sum_\alpha \rho_\alpha^2/w_\alpha^2(z)}, \quad (2.95)$$

avec

$$w^2(z) = w_0^2(1 + z^2/z_R^2), \quad (2.96)$$

où par souci de simplicité, nous avons omis l'indice α . On retrouve le comportement qualitatif mentionné dans l'introduction. Pour $z \ll z_{R\alpha}$, correspondant au régime de diffraction de Fresnel, le diamètre du faisceau change peu et reste égal à w_0 . Pour $z \gg z_R$, on entre dans le régime de la diffraction de Fraunhofer et le faisceau diverge sous l'effet de la diffraction. Dans cette limite, on a en effet $w(z) \sim w_0 z/z_R$, correspondant à une divergence avec un angle $\theta \sim w_0/z_R \sim \lambda/w_0$, qui correspond bien à l'angle de diffraction par un objet de taille w_0 (Fig. 2.17).

2.6.2 Propagation d'un faisceau non-gaussien, notion de M^2

D'après l'inégalité de Heisenberg (2.87), on a pour un faisceau de profil transverse quelconque

$$\Delta q_\alpha^2 = \frac{M^2}{4\Delta\rho_\alpha^2}, \quad (2.97)$$

où M^2 est un nombre supérieur à 1, ne valant 1 que pour un faisceau gaussien. Ce paramètre m^2 mesure la qualité du mode transverse du faisceau et caractérise la divergence de celui-ci (puisque par définition, lorsque $M = 1$ le faisceau est gaussien et donc de divergence minimale). On montre en effet dans ce qui suit que l'évolution du rayon du faisceau s'exprime simplement en fonction de M^2 . En effet, comme nous l'avons noté précédemment, nous pouvons mettre l'équation de l'enveloppe lentement variable sous la forme d'une équation de Schrödinger

$$ik \frac{d}{dz} |\mathcal{E}\rangle = \widehat{H} |\mathcal{E}\rangle, \quad (2.98)$$

où l'on introduit le "hamiltonien" $\widehat{H} = \widehat{q}^2/2$. D'après le théorème d'Ehrenfest (cf. appendice ??), le diamètre $\Delta\rho_\alpha^2 = \langle \mathcal{E} | \widehat{\rho}_\alpha^2 | \mathcal{E} \rangle$ obéit à l'équation d'évolution

$$ik \frac{d\langle \widehat{\rho}_\alpha^2 \rangle}{dz} = \langle [\widehat{\rho}_\alpha^2, \widehat{H}] \rangle, \quad (2.99)$$

où le commutateur se calcule sans difficulté en utilisant la relation $[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}]$, ce qui nous donne

$$[\widehat{\rho}_\alpha^2, \widehat{H}] = i(\widehat{\rho}_\alpha \widehat{q}_\alpha + \widehat{q}_\alpha \widehat{\rho}_\alpha). \quad (2.100)$$

En introduisant le corrélateur $\widehat{C}_\alpha = \widehat{\rho}_\alpha \widehat{q}_\alpha + \widehat{q}_\alpha \widehat{\rho}_\alpha$, on en déduit que

$$k \frac{d\langle \widehat{\rho}_\alpha^2 \rangle}{dz} = \langle \widehat{C}_\alpha \rangle. \quad (2.101)$$

Pour poursuivre le calcul, nous avons besoin de la valeur de $\langle \widehat{C}_\alpha \rangle$ que l'on obtient une nouvelle fois en utilisant le théorème d'Ehrenfest, ce qui nous donne après application de la formule pour le commutateur avec un produit d'opérateurs

$$ik \frac{d\langle \widehat{C}_\alpha \rangle}{dz} = \langle [\widehat{C}_\alpha, \widehat{H}] \rangle = 2i\langle \widehat{q}_\alpha^2 \rangle. \quad (2.102)$$

On clôt alors en notant que \widehat{q}_α^2 commute avec \widehat{H} et est donc conservé en valeur moyenne. On en déduit par conséquent que

$$\langle \widehat{C}_\alpha \rangle = \frac{2\Delta q_\alpha^2}{k} (z - z_0), \quad (2.103)$$

puis

$$\Delta\rho_\alpha^2(z) = \Delta\rho_\alpha^2(z_0) + \frac{\Delta q_\alpha^2}{k^2} (z - z_0)^2. \quad (2.104)$$

Cette équation peut alors se mettre sous une forme analogue à l'évolution de la largeur du faisceau gaussien (Eq. 2.96), puisque l'on a pour finir

$$\Delta\rho_\alpha^2(z) = \Delta\rho_\alpha^2(z_0) \left(1 + M^2 (z - z_0)^2 / z_R^2\right), \quad (2.105)$$

où l'on a défini la longueur de Rayleigh par $z_R = k\Delta\rho_0^2(z_0)$.

2.6.3 Optique gaussienne, matrices $ABCD$

Considérons la propagation d'un faisceau gaussien au travers d'une lentille décrite par le formalisme mis en place dans le cadre général de la propagation paraxiale. D'après ce que nous avons vu, l'effet de la lentille est d'introduire un déphasage quadratique en position de sorte qu'à la sortie d'une lentille située en z_0 , l'amplitude d'un faisceau gaussien de paramètre q s'écrit

$$\mathcal{E}(\rho, z_0^+) = \frac{k\mathcal{E}_0}{q} e^{-ik\rho^2/2(1/q-1/f)}, \quad (2.106)$$

autrement dit, le faisceau reste gaussien avec un nouveau paramètre q' tel que

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{f}. \quad (2.107)$$

Cette relation est formellement analogue à la relation de conjugaison pour une lentille mince obtenue en optique géométrique, à condition de remplacer la distance au centre optique par le paramètre q de la gaussienne.

La relation liant (2.107) q' à q peut se récrire sous la forme d'une homographie

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (2.108)$$

où les coefficients ABCD peuvent se mettre sous la forme d'une matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.109)$$

où l'on reconnaît la matrice ABCD (2.75) introduite dans le cadre de l'optique géométrique. Cette coïncidence n'est pas un hasard, et se généralise en réalité à tout système optique paraxial. À titre d'exemple, on voit que la propagation libre du faisceau gaussien pour laquelle $q(z) = q(0) + z$ peut se mettre sous la forme (2.108) avec la matrice ABCD (2.73).

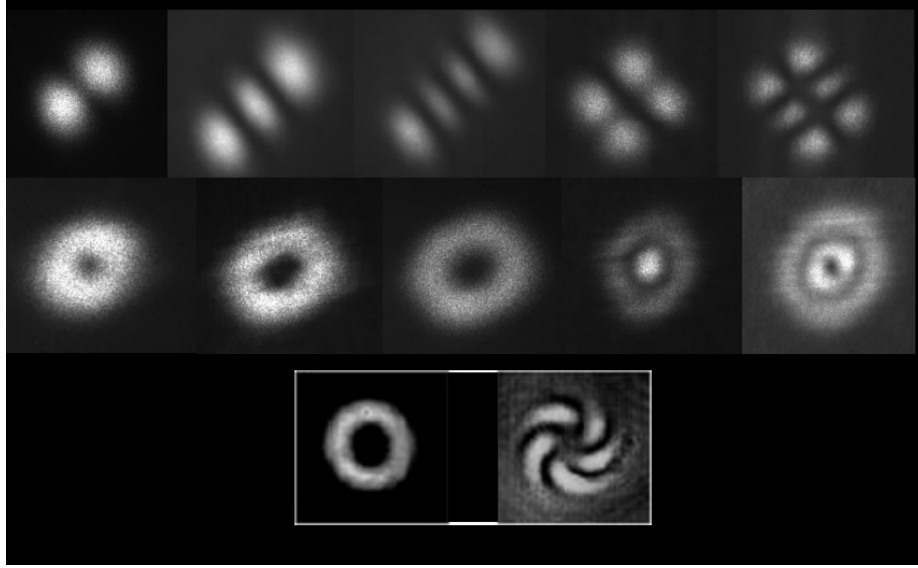


FIGURE 2.18 – Ligne du haut : visualisation de modes de Hermite-Gauss. De gauche à droite, HG_{01} , HG_{02} , HG_{03} , HG_{11} , HG_{21} . Ligne du milieu, modes de Laguerre-Gauss LG_{10} , LG_{20} , LG_{30} , LG_{11} , LG_{21} . Ligne du bas, visualisation du profil de phase d'un mode de Laguerre-Gauss par interférence avec un faisceau gaussien.

2.6.4 Faisceaux gaussiens d'ordre supérieur

Les faisceaux gaussiens que nous venons d'étudier peuvent se généraliser à des bases de fonctions solutions de l'équation de l'enveloppe lentement variable. Les deux principales familles de solutions sont constituées respectivement par les modes de Hermite-Gauss et Laguerre-Gauss.

Les modes de Hermite-Gauss, notés $H_{m,n}$ correspondent à un profil transverse de la forme

$$\mathcal{E}(x; y) = P_n(x)P_m(y) \exp(-(x^2 + y^2)/w^2) \quad (2.110)$$

où P_n est le polynôme de Hermite de degré n . Le polynôme P_n possède n racines, ce qui implique l'existence de n (resp. m) annulations de l'intensité dans la direction x (resp. y).

Exprimé en coordonnées polaire (ρ, θ) , le profil transverse d'un mode de Laguerre-Gauss LG_{mn} s'écrit

$$\mathcal{E}(x, y) = P_{mn}(\rho) e^{-\rho^2/w^2} e^{im\theta} \quad (2.111)$$

où les P_{mn} sont des polynômes de Laguerre.

Des profils expérimentaux de ces deux classes de solutions sont représentés sur la figure 2.18. On note la mise en évidence du profil de phase des modes

de Laguerre-Gauss. La structure en spirale est associée à une propagation “en hélice” de l’énergie le long du faisceau. En effet les surfaces équiphasés, dont la normale définit le vecteur de Poynting, sont des hélicoïdes données par l’équation $kz + m\theta = \text{cte}$. Cette structure de phase est par ailleurs associée à un moment orbital des photons, par analogie aux états propres du moment cinétique en mécanique quantique. Les modes de Laguerre-Gauss peuvent ainsi être utilisés pour transférer du moment cinétique à la matière, comme cela a par exemple été utilisé récemment pour mettre en rotation un gaz d’atomes froids [1]. Le principe de l’expérience consiste simplement à réaliser une sorte de vis d’Archimède optique en faisant interférer un faisceau gaussien et un faisceau de Laguerre-Gauss contrepropageant. Si les faisceaux étaient gaussiens, on obtiendrait simplement une onde stationnaire dont les nœuds et les ventres constitueraient une succession de plans orthogonaux à l’axe de propagation. Dans le cas présent, les surfaces nodales sont des hélices, que l’on peut mettre en rotation en décalant légèrement la fréquence relative des deux faisceaux. On obtient alors un profil d’intensité lumineuse analogue à un tire-bouchon en rotation qui peut entraîner les atomes avec lui¹¹.

2.6.5 Mode propre d’une cavité optique

En plus d’être associés à une divergence minimale, les faisceaux gaussiens constituent le mode naturel d’émission d’un grand nombre de lasers. En effet, comme nous allons le montrer dans ce qui suit, ce sont aussi des modes propres d’une cavité optique constituée de deux miroirs sphériques en vis-à-vis. Formellement, le rôle du miroir sphérique est identique à celui d’une lentille mince puisqu’il introduit un déphasage entre les rayons réfléchis dépendant de la distance à l’axe optique. En “dépliant” la cavité il est formellement possible de remplacer les deux miroirs par une succession de lentilles.

Soit M la matrice ABCD correspondant à un aller-retour dans la cavité. Si l’on note $q' = (Aq + B)/(Cq + D)$, on doit avoir $q' = q$ et donc

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (2.112)$$

Cette équation se transforme en une équation polynômiale de degré deux $Cq^2 + (D - A)q - B = 0$ dont les solutions doivent être complexes puisque $\text{Im}(q) = z_R \neq 0$ donne le diamètre du faisceau au niveau de son col. Cette condition est remplie lorsque le discriminant est négatif et donc $(D - A)^2 + 4BC < 0$. En utilisant le fait que le déterminant des matrices ABCD vaut 1, on voit que $DA - BC = 1$ ce qui permet de récrire la condition sur le discriminant comme $(D + A)^2 - 4 < 0$, soit

$$|\text{Tr}(M)| < 2, \quad (2.113)$$

11. Plus précisément, le champ résultant de l’interférence des deux faisceaux contrepropageants est de la forme $e^{i(kz + m\theta - \omega_+ t)} + e^{i(-kz - \omega_- t)}$ dont le module carré est $2\sin^2(kz + m\theta/2 - \delta\omega t/2)$, où $\delta\omega = \omega_+ - \omega_-$.

puisque $\text{Tr}(M) = A + D$.

Si l'on considère deux miroirs identiques de focale f et distants d'une distance L , la matrice M vaut $M = \mathcal{P}_L \mathcal{L}_f \mathcal{P}_L \mathcal{L}_f$ où les matrices \mathcal{L}_f et \mathcal{P}_L sont les matrices ABCD décrivant respectivement la traversée d'une lentille (ou la réflexion sur un miroir) et la propagation dans l'espace libre (cf. Eq. (2.73) et (2.75)). On a donc ici

$$M = \begin{pmatrix} (1 - L/f)^2 - L/f & L(2 - L/f) \\ (-2 + L/f)/f & 1 - L/f \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

ce qui nous donne pour la condition (2.113)

$$L/f < 4 \quad (2.115)$$

Lorsque cette condition est remplie, on dit que la cavité est stable et qu'elle peut abriter un mode gaussien. Ce critère de stabilité peut se réinterpréter en terme d'optique géométrique puisque l'on montre qu'il correspond à une stabilité des rayons qui restent alors proches de l'axe optique.

2.7 Appendices

2.7.1 Intégrales gaussiennes

On cherche ici à calculer l'intégrale

$$I(\alpha, \beta) = \int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{-\alpha \rho^2 / 2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (2.116)$$

où α et β sont deux nombres complexes, avec $\text{Re}(\alpha) > 0$ de façon à garantir la convergence. Commençons par étudier le cas où α est réel et β nul. Dans ce cas, on doit calculer

$$I = \int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{-\alpha \rho^2}, \quad (2.117)$$

que l'on calcule par exemple en passant en coordonnées polaires (ρ, θ) , soit

$$I = \int_0^\infty 2\pi \rho d\rho e^{-\alpha \rho^2 / 2} = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (2.118)$$

en posant $u = \rho^2$ dans l'intégrale.

Pour $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, mais réel, on met l'argument de l'exponentielle sous forme canonique, soit

$$\begin{aligned} I &= \int d^2 \boldsymbol{\rho} \exp [-\alpha (\rho^2 + 2\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\rho} / \alpha) / 2] \\ &= \int d^2 \boldsymbol{\rho} \exp [-\alpha ((\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\beta} / \alpha)^2 - \beta^2 / \alpha^2) / 2]. \end{aligned}$$

En posant $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\beta}/\alpha$, on en déduit que

$$I = e^{\beta^2/2\alpha} \int d^2 \boldsymbol{\rho}' e^{-\alpha \rho'^2/2}. \quad (2.119)$$

On est donc ramené au problème précédent, ce qui nous donne pour finir

$$\int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{-\alpha \rho^2/2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \frac{2\pi}{\alpha} e^{\beta^2/2\alpha}. \quad (2.120)$$

En toute rigueur, nous n'avons montré cette égalité que pour α et $\boldsymbol{\beta}$ réels. Cependant, les deux membres de l'égalité étant définis et analytiques sur le demi-plan complexe $\text{Re}(\alpha) > 0$, on en déduit leur égalité en vertu de l'unicité du prolongement analytique.

2.7.2 Inégalité de Heisenberg et critère de saturation.

Considérons deux opérateurs hermitiens \widehat{A} et \widehat{B} opérant sur les fonctions de carré sommable. Pour λ réel, on définit

$$P(\lambda) = \left\| \left(\widehat{A} + i\lambda \widehat{B} \right) |\mathcal{E}\rangle \right\|^2. \quad (2.121)$$

P étant un module est positif pour tout λ . Par ailleurs, si on le développe explicitement, on voit que celui-ci est un polynôme d'ordre 2 que l'on écrit sous la forme

$$P(\lambda) = \langle \widehat{A}^2 \rangle + i\lambda \langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle + \lambda^2 \langle \widehat{B}^2 \rangle. \quad (2.122)$$

Comme ce polynôme ne change jamais de signe, ceci signifie qu'il ne possède pas de racine réelle et que son discriminant est par conséquent négatif, soit

$$(i\langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle)^2 - 4\langle \widehat{A}^2 \rangle \langle \widehat{B}^2 \rangle \leq 0. \quad (2.123)$$

Comme \widehat{A} et \widehat{B} sont hermitien, $i[\widehat{A}, \widehat{B}]$ l'est aussi et donc $i\langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle$ est réel. Si \widehat{A} et \widehat{B} sont de valeur moyenne nulle¹², on peut par conséquent récrire l'inégalité précédente comme

$$\Delta A \Delta B \geq \left| \frac{\langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle}{2} \right|, \quad (2.124)$$

où $\Delta A^2 = \langle \widehat{A}^2 \rangle$ désigne la variance de l'observable \widehat{A} .

Cherchons à présent à quelle condition cette inégalité est saturée (ou, autrement dit, à quelle condition l'inégalité de Heisenberg est une égalité). Cette condition est remplie lorsque le discriminant de P s'annule et donc lorsque celui-ci possède une racine double $\lambda_0 = -i\langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle / 2\Delta B^2$. Pour cette valeur particulière de λ , on a d'après (2.121)

¹². Au besoin en soustrayant aux observables leurs valeurs moyennes, ce qui ne change pas leurs commutateurs.

$$\left(\widehat{A} + i\lambda_0\widehat{B}\right)|\mathcal{E}\rangle = 0 \quad (2.125)$$

Bibliographie

- [1] M. F. Andersen, C. Ryu, Pierre Cladé, Vasant Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Quantized rotation of atoms from photons with orbital angular momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 97(17) :170406, Oct 2006.
- [2] J.F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr. Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator. *Nature*, 467(7311) :68–72, 2010.