

Chapitre 1

Le photon et la théorie quantique du rayonnement

1.1 De l'optique ondulatoire au photon

Un des plus grands succès de la physique du XIX^{ème} siècle a été, suite aux travaux de Young et Fresnel, la compréhension de la nature ondulatoire de la lumière, puis son identification à la propagation d'ondes électromagnétiques par Maxwell. Ce triomphe ne fut cependant que de courte durée : dès la fin de ce siècle une série de mystères expérimentaux vinrent mettre à bas l'élégant édifice de l'optique ondulatoire, entraînant avec elle toute la physique classique et laissant la place aux théories quantiques et relativistes. En effet, ces deux révolutions ont pour point commun d'avoir vu le jour suite à des mesures optiques inexplicables : l'expérience de Michelson et Morley¹ dans le cas de la Relativité, et l'effet photoélectrique et le spectre du corps noir pour la mécanique quantique.

Bien que Planck fut le premier à envisager le caractère discret des échanges d'énergie entre lumière et matière, c'est Einstein qui émit en 1905 l'hypothèse de l'existence d'une particule de lumière qui fut baptisée par la suite photon. La preuve de l'existence du photon n'était à l'époque qu'indirecte et ne fut acceptée que tardivement², notamment suite aux expériences de Compton sur la diffusion des rayons X par les électrons d'un solide [5]. mais aujourd'hui, les progrès technologiques (photomultiplicateurs, photodiodes à avalanches) nous permettent d'observer des photons uniques, qui nous prouvent sans ambiguïté aucune l'existence directe de ces particules (Fig. 1.1).

Ce premier chapitre présente les principes de la théorie quantique du rayon-

1. Qui constitue en réalité le point final d'une série d'expériences (découverte de l'aberration des étoiles par Bradley ou expérience de Fizeau) qui ont montré l'incohérence de la notion d'éther lumineux.

2. Citons ainsi M. Planck, qui dans un rapport sur la candidature d'Albert Einstein à l'Académie de Berlin écrivit "Qu'il ait parfois manqué la cible dans ces spéculations, par exemple avec son hypothèse des quanta lumineux ne peut être retenu contre lui, car il n'est pas possible d'introduire des idées réellement nouvelles sans prendre parfois un risque".

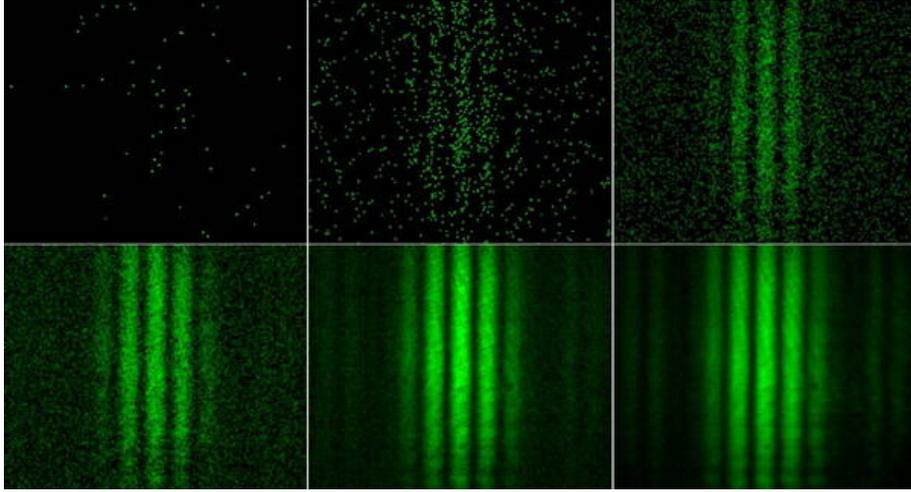


FIGURE 1.1 – Expérience de fentes de Young extraite de [7] démontrant la dualité onde corpuscule. En haut à droite, le temps d’intégration est court et les photons arrivent un à un sur le détecteur. Pour des temps d’intégration plus longs, la distribution moyenne de photons forme la figure d’interférence caractéristique des fentes d’Young.

nement unifiant dans un formalisme unique les aspects corpusculaires et ondulatoires de la lumière. Le développement qui suit ne se veut cependant pas exhaustif, faute de place d’une part, puisqu’une dérivation rigoureuse et complète de l’électrodynamique quantique serait l’objet d’un semestre à elle toute seule, et d’autre part car le cadre naturel de l’électromagnétisme est l’espace-temps Minkovskien de la Relativité d’Einstein qui requiert une réécriture des principes de la mécanique quantique dans le cadre de la théorie quantique des champs. En raison de ces limitations intrinsèques, certains résultats présentés ci-dessous pourront paraître à première vue arbitraires, mais trouvent pourtant tout leur sens dans ce cadre étendu.

Le constituant élémentaire de la lumière étant le photon, nous débuterons par un rappel de ses propriétés. Nous présenterons ensuite la “seconde quantification”, qui servira d’introduction à la théorie quantique des champs et nous fournira un cadre adapté à l’étude des phénomènes collectifs ainsi qu’aux phénomènes d’absorption ou d’émission de photons. Armés de ce formalisme, nous verrons comment construire les observables champs électrique et magnétique et nous retrouverons alors les équations de Maxwell dans le vide. Nous exhiberons les spécificités de la théorie quantique lors de la discussion des fluctuations du champ électromagnétique durant laquelle nous nous pencherons plus particulièrement sur les propriétés singulières du vide quantique et les expériences mettant en évidence ses propriétés paradoxales.

1.1.1 Masse du photon

Le photon se déplaçant à la vitesse de la lumière (!) cette particule doit être de masse nulle. En effet, on montre en Relativité que la relation de dispersion liant l'énergie E à l'impulsion p d'une particule de masse m s'écrit

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.1)$$

On calcule la vitesse de la particule en utilisant les équations de Hamilton³, ce qui nous donne

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{p/m}{\sqrt{1 + p^2/m^2 c^2}}. \quad (1.2)$$

Pour $m \neq 0$, on obtient une vitesse dépendant de l'impulsion (avec pour $p \rightarrow 0$, la formule classique $v = p/m$), alors que pour $m = 0$, il vient simplement $E = pc$ et donc $v = c$.

Expérimentalement, affirmer que le photon n'a pas de masse n'a cependant aucun sens, car toute mesure présente des incertitudes expérimentales et tout au plus peut-on donner une borne supérieure à celle-ci⁴. Plusieurs expériences ont testé la possibilité d'une masse non nulle du photon et ont toutes à ce jour conclu à une valeur compatible avec 0, à une précision de 10^{-51} kg. Pour simplifier, ces expériences mesurent les déviations aux lois de l'électromagnétisme de Maxwell dues à l'existence d'une éventuelle masse du photon, soit en laboratoire par le test de la loi de Coulomb, et en particulier l'annulation du champ électrique dans d'une cavité conductrice, soit par des expériences astrophysiques, comme la mesure du champ magnétique de Jupiter par les sondes Pioneer.

Pour faire court⁵, on peut construire une équation de Schrödinger relativiste à partir de l'équation (1.1) en remplaçant p et E par leurs observables quantiques, ce qui nous donne un hamiltonien \hat{H} satisfaisant la condition

$$\hat{H}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.3)$$

Pour une fonction d'onde obéissant à l'équation de Schrödinger $i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$, on a $-\hbar^2\partial_t^2\psi = \hat{H}^2\psi$, soit

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = (-\nabla^2 + m^2 c^2/\hbar^2)\psi, \quad (1.4)$$

3. Alternativement, on peut aussi calculer la vitesse de groupe de l'onde $v_g = d\omega/dk$ qui redonne la même formule.

4. Il peut paraître étrange d'envisager un photon de masse non nulle, car d'après l'argument précédent, la lumière ne se propagerait plus à la vitesse de la lumière c . En fait, ceci provient d'une ambiguïté de la définition de c , qui cache en réalité deux interprétations physiques distinctes. En effet, il s'agit d'une part de la vitesse limite qu'aucune particule massive ne peut dépasser et qui intervient dans la théorie de la Relativité – et notamment dans l'équation (1.1) – et d'autre part, elle s'identifie à la vitesse d'une certaine famille de particules, les photons, qui se trouvent avoir une masse nulle aux incertitudes expérimentales près.

5. La procédure que nous allons suivre ne s'applique en toute rigueur qu'à une particule de spin nul, ce qui n'est pas le cas du photon, mais ne change cependant pas les conclusions du propos.



FIGURE 1.2 – Les sondes Pioneer ont permis l'étude précise du champ magnétique jovien bornant la masse du photon à au plus 10^{-51} kg [6]. (©Nasa)

baptisée équation de Klein-Gordon⁶. Pour $m = 0$, on trouve bien l'équation d'onde caractérisant la propagation des ondes électromagnétiques. Dans le cas statique, ψ satisfait l'équation de Poisson $\nabla^2\psi = 0$, donnant un comportement en $1/r$ caractéristique des potentiels électromagnétiques (scalaire ou vectoriel) statiques, comme on le voit en notant qu'en coordonnées sphériques $\nabla^2\psi = r^{-1}\partial_r^2(r\psi)$. En nous fondant sur cette analogie, nous identifierons donc par la suite la fonction d'onde ψ avec le potentiel électrostatique.

Lorsque l'on considère une particule de masse non nulle, on constate que la solution de l'équation de Klein-Gordon statique se met sous la forme d'un potentiel de Yukawa

$$\psi \propto \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r}, \quad (1.5)$$

où $\lambda_c = \hbar/mc$ est la longueur d'onde de Compton. Dans cette expression, on retrouve la dépendance en $1/r$, mais "écrantée" sur des distances plus grandes que λ_c par la décroissance exponentielle⁷. Ce résultat, valable pour une charge

6. En réalité, écrite pour la première fois par Schrödinger, avant même qu'il ne considère la version non relativiste qui porte son nom. Il abandonna l'équation 1.4 car celle-ci ne redonnait pas la bonne structure fine de l'atome d'hydrogène, qui dépend du spin et ne peut donc pas être correctement décrite par l'équation de Klein-Gordon décrivant des particules sans spin.

7. Le même argument permet de comprendre la portée finie des interactions nucléaires fortes et faibles, puisque celles-ci sont transportées par des particules de masse non nulle (le pion et les bosons W et Z respectivement, dont les masses sont de l'ordre du GeV et correspondent à une longueur d'onde de Compton de l'ordre du fm.

ponctuelle générant un potentiel isotrope, se généralise à toute distribution de charge et de courant qui crée dans ce modèle un champ électrique et magnétique présentant le même comportement exponentiel s'atténuant sur une distance λ_c . Les mesures du champ magnétique de Jupiter par les sondes Pioneer ont ainsi pu borner inférieurement λ_c à 5×10^8 m (autrement dit, sur cette échelle de distance le champ magnétique de la planète varie bien en $1/r^3$) ce qui fixe la borne supérieure la plus précise à ce jour pour la masse du photon.

1.1.2 Le spin du photon

Le photon est une particule de spin 1 qui d'un point de vue ondulatoire peut être associé à la polarisation du champ électromagnétique. En effet, on peut montrer expérimentalement comme proposé pour la première fois par Poynting et observé par Beth [2] (voir Fig. 1.3 pour une réalisation récente.) que lorsqu'une onde électromagnétique de puissance P et polarisée circulairement est absorbée dans un milieu absorbant, celui-ci subit un couple $\Gamma = P/\omega$, correspondant au transfert d'un moment cinétique \hbar par photon absorbé⁸. En effet soit Φ le flux de photons incidents, chaque photon portant une énergie $\hbar\omega$, la puissance du faisceau lumineux et donc $P = \hbar\omega\Phi$. Lorsque le photon est absorbé, celui-ci cède à la fois son énergie (ce qui chauffe le milieu absorbant), sa quantité de mouvement (se traduisant par le phénomène de pression de radiation) et aussi son moment cinétique. Chaque photon portant un moment cinétique \hbar , le couple subi par le milieu absorbant vaut donc simplement $\Gamma = \Phi\hbar = P/\omega$.

Le photon étant une particule de spin 1, son espace des degrés de liberté internes est de dimension 3 et peut être engendré par les vecteurs $|m_z \in \{0, \pm 1\}\rangle$ correspondant aux états de moment cinétique fixé selon z . Comme nous l'avons vu plus haut, les états $|m_z = \pm 1\rangle$ portant du moment cinétique correspondent à des polarisations circulaires. Pour construire l'équivalent des états de polarisation linéaire dans l'espace de Hilbert des états de spin du photon, on pose

$$|z\rangle = |m_z = 0\rangle \quad (1.6)$$

$$|x\rangle = \frac{|m_z = +1\rangle - |m_z = -1\rangle}{\sqrt{2}i} \quad (1.7)$$

$$|y\rangle = \frac{|m_z = +1\rangle + |m_z = -1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.8)$$

que l'on va identifier aux polarisations dans les trois directions (x, y, z) de l'espace. On peut construire ces vecteurs par analogie avec la représentation complexe d'une onde polarisée circulairement, mais plus fondamentalement, cette relation provient du fait que les vecteurs $|x, y, z\rangle$ se transforment comme les vecteurs de base $\mathbf{u}_{x,y,z}$ de l'espace "réel" sous l'effet d'une rotation. Considérons

8. Notons que ce résultat obtenu en invoquant la notion de photon peut se retrouver par un bilan de force à partir des équations de Maxwell dans un milieu absorbant, comme le montre l'absence de la constante de Planck dans le résultat final.

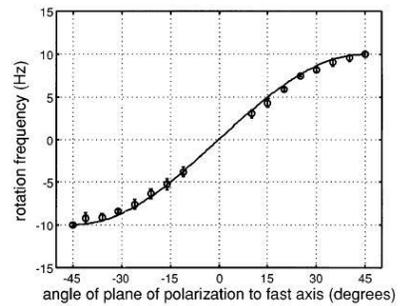
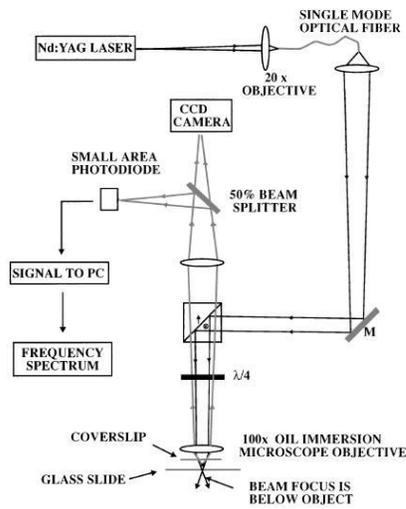


FIGURE 1.3 – Gauche : principe de l'expérience : on focalise un faisceau laser sur une bille micrométrique maintenue au foyer de l'objectif de microscope et que l'on observe sur une caméra CCD. On inverse la polarisation de la lumière de circulaire gauche à circulaire droit à l'aide de la lame $\lambda/4$ ce qui provoque une inversion du sens de rotation de la bille, comme observé sur la courbe de droite. Données extraites de [9].

ainsi le cas d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe z dont l'action dans l'espace des états est donné par l'opérateur $\widehat{R}_\theta = \exp -i\theta\widehat{L}_z/\hbar$. On a alors

$$\widehat{R}_\theta|x\rangle = \frac{e^{-i\theta}|m_z = +1\rangle - e^{i\theta}|m_z = -1\rangle}{\sqrt{2}i}, \quad (1.9)$$

soit en réexprimant les vecteurs $|m_z = \pm 1\rangle$ en fonction des polarisations linéaires,

$$\widehat{R}_\theta|x\rangle = \cos\theta|x\rangle - \sin\theta|y\rangle, \quad (1.10)$$

qui correspond à la formule de rotation de \mathbf{u}_x d'un angle θ autour de l'axe z . Plus généralement, on démontre que dans la base $|x, y, z\rangle$, l'opérateur de rotation \widehat{R}_θ possède les mêmes éléments de matrice que la rotation de \mathbb{R}^3 correspondante.

Comme on le sait bien, la transversalité des ondes électromagnétique interdit l'existence d'une polarisation parallèle à la direction de propagation. Si celle-ci est alignée selon l'axe z , ceci revient à interdire l'état $|z\rangle = |m_z = 0\rangle$. Cette particularité est relié à une propriété subtile de la notion de spin des particules de masse nulle (et donc du photon). En effet, de manière général, l'opérateur moment cinétique est défini comme le générateur infinitésimal des rotations. Pour définir le spin (ou moment cinétique *intrinsèque* par rapport au moment cinétique *orbital* classique $\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$), on se place dans le référentiel du centre de masse de la particule considérée de façon à annuler le moment cinétique orbital, et on caractérise comment les variables internes de la particule se transforment sous l'effet des rotations de l'espace ambiant à trois dimensions. Cette procédure n'est cependant pas réalisable dans le cas du photon, puisque d'après le Principe de Relativité, celui se déplace à la vitesse c dans tout référentiel et ne peut donc être immobilisé. Dit autrement, il est impossible de dissocier le moment cinétique orbital du moment cinétique interne d'une particule de masse nulle.

Dans le cas du photon, on va donc plutôt considérer l'hélicité σ , c'est-à-dire la projection du moment cinétique sur la direction de propagation du photon – qui est toujours défini puisqu'on ne peut arrêter une particule de masse nulle – soit $\widehat{\sigma} = \widehat{\mathbf{J}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}$, où $\widehat{\mathbf{J}}$ est le moment cinétique total du photon et $\mathbf{u}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$ désigne le vecteur unitaire selon la direction de propagation. L'avantage est que le moment cinétique orbital ne contribue pas à l'hélicité⁹, puisque par définition, il est orthogonal à \mathbf{p} . Lors de la caractérisation des variables internes sous l'effet d'une rotation, on ne considère plus une rotation quelconque de l'espace à 3D, mais simplement une rotation dans le plan transverse à \mathbf{p} . Mathématiquement, on montre que cette restriction des transformations admissibles aboutit à ne considérer pour l'hélicité que les valeurs $\pm S\hbar$, et non plus l'ensemble des $2S + 1$ valeurs $\{-S, -S + 1, \dots, S - 1, S\}$, où S est le spin de la particules (pour une particule de spin S). Dans le cas du photon, particule de spin 1, ceci signifie que seules les hélicités $\pm\hbar$ sont permises, et que $\sigma = 0$ est interdit.

9. Et aussi que cette quantité est un invariant relativiste.

1.2 Notion de seconde quantification

1.2.1 Espace de Fock

Partant des propriétés générales du photon énoncées précédemment, nous allons à présent développer le formalisme nécessaire à la description d'une assemblée de photons. Le photon étant une particule de spin 1, c'est un boson et la fonction d'onde d'un ensemble de N photons doit être symétrique par échange de deux particules. Soit \mathcal{H}_1 l'espace des états à une particule que l'on dote d'une base $|\mu\rangle$ (caractérisée par exemple par l'impulsion et l'hélicité du photon). Si l'on ne prend pas en compte l'indiscernabilité, une base de l'espace des états à N particules \mathcal{H}_N est engendrée par la famille $|1 : \mu_1, 2 : \mu_2, \dots, N : \mu_N\rangle$, où $|k : \mu_k\rangle$ désigne l'état de la particule k . Dans le cas d'un ensemble de particules indiscernables, on ne peut pas identifier les particules individuellement et l'état physique du système doit être invariant par échange de deux particules.

Dans le cas des bosons, cette base est générée à partir des états discernables en effectuant des combinaisons linéaires symétriques de la forme

$$|\{n_\mu\}\rangle = \mathcal{N} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_N} |1 : \mu_{\tau(1)}, 2 : \mu_{\tau(2)}, \dots, N : \mu_{\tau(N)}\rangle, \quad (1.11)$$

où n_μ désigne le nombre de particules dans l'état μ (pour un état à N particules, on a donc $\sum_\mu n_\mu = N$) et où \mathcal{S}_N désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ et \mathcal{N} est un facteur de normalisation (égal à $\sqrt{N! / \prod_k n_k!}$). Comme on le conçoit, ce formalisme s'avère malaisé à mettre en œuvre lorsque le nombre de particules est important. Par ailleurs, la relativité permet la création et la disparition de particules, ce qui va constituer l'essence même de l'interaction lumière-matière dont les processus élémentaires mettent en jeu l'absorption et l'émission de photons. La théorie quantique "usuelle" fondée sur les propriétés des fonctions d'ondes de la forme $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ considère un espace de Hilbert contenant un nombre fixé de particules et ne peut donc pas décrire ce type de phénomène.

Afin de pouvoir étudier les processus d'absorption et l'émission de photons, on est par conséquent amené à considérer un espace plus vaste, appelé *espace de Fock*, défini comme la somme de tous les espaces \mathcal{H}_N , c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N^s, \quad (1.12)$$

où l'on note \mathcal{H}_N^s l'espace des états à N particules symétrique par échange et où l'on a introduit un espace \mathcal{H}_0^s de dimension 1 correspondant au vide de photons¹⁰.

10. Étendre l'espace de Hilbert à un nombre quelconque de particules peut amener à des conclusions paradoxales puisque d'après le postulat de superposition, il est à présent possible d'envisager des états dans des superpositions de nombres de photons différents. À y regarder plus près cependant, certaines situations élémentaires de mécanique quantique relèvent de ce phénomène. En effet, dans la RMN, le spin nucléaire oscille entre deux états suite à l'interaction

1.2.2 Opérateurs création et annihilation de bosons

Nous allons à présent introduire les opérateurs création et annihilation de particules. On définit \hat{a}_μ par

$$\hat{a}_{\mu_k} |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\mu_k}} |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k} - 1, \dots\rangle. \quad (1.13)$$

Cet opérateur couple un espace \mathcal{H}_N avec l'espace \mathcal{H}_{N-1} et supprime une particule dans le mode μ_k . L'intérêt du facteur $\sqrt{n_{\mu_k}}$, introduit par analogie avec l'opérateur annihilation d'un oscillateur harmonique, apparaîtra par la suite. Le complexe conjugué de \hat{a}_μ est l'opérateur création dont l'action est simplement donnée par

$$\hat{a}_{\mu_k}^\dagger |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\mu_k} + 1} |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k} + 1, \dots\rangle. \quad (1.14)$$

Les opérateurs création et annihilation satisfont alors les relations de commutation suivantes

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu, \mu'} \quad (1.15)$$

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\mu'}] = 0 \quad (1.16)$$

Tout comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, on définit l'opérateur $\hat{N}_\mu = \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu$ donc l'action sur les états de Fock s'écrit comme pour un oscillateur harmonique

$$\hat{N}_\mu |n_\mu\rangle = n_\mu |n_\mu\rangle. \quad (1.17)$$

Autrement dit, les états de Fock sont des états propres de \hat{N}_μ avec pour valeurs propres les nombres de particules dans l'état μ . \hat{N}_μ est donc l'opérateur *nombre de particules dans l'état μ* .

Avant de poursuivre plus avant notons que le formalisme mis en œuvre ici ne s'applique qu'à des bosons, puisque, comme démontré dans le cas d'un oscillateur harmonique, les valeurs propres de \hat{N}_μ prennent toutes les valeurs entières. Pour définir des opérateurs créations et annihilation de fermions, il faut modifier les relations de commutations (1.15) et (1.16) de façon à prendre en compte l'antisymétrisation de la fonction d'onde.

1.2.3 Hamiltonien et évolution du vecteur d'état

On cherche ici à construire le hamiltonien décrivant les photons dans le vide : celui-ci n'absorbant pas la lumière, le nombre de photons est conservé en l'absence de matière. Ceci signifie que n_μ doit être une constante du mouvement

avec un champ magnétique tournant. D'un point de vue corpusculaire, ces oscillations de Rabi s'interprètent comme des cycles d'émission et d'absorption de photon. Lorsque le noyau se trouve dans une superposition de l'état fondamental et excité, il a "à la fois" émis et absorbé un photon.

et donc que \widehat{N}_μ commute avec le hamiltonien. En conséquence de quoi, les états de Fock, états propres des \widehat{N}_μ , sont aussi états propres de \widehat{H} .

Or, les photons n'interagissant pas entre eux, ajouter au système un photon dans le mode μ revient à augmenter l'énergie de $\hbar\omega_\mu$, où $\omega_\mu = ck_\mu$ est la pulsation du mode considéré. L'énergie d'un état de Fock est donc de la forme

$$E(\{n_\mu\}) = \sum_{\mu} \hbar\omega_\mu (n_\mu + c_\mu), \quad (1.18)$$

où c_μ est une constante servant à définir l'origine des énergies¹¹. Or, d'après la remarque précédente, $E(\{n_\mu\})$ doit être valeur propre de \widehat{H} , ce qui permet d'écrire que $\widehat{H}|\{n_\mu\}\rangle = E(\{n_\mu\})|\{n_\mu\}\rangle$, soit

$$\widehat{H} = \sum_{\mu} \hbar\omega_\mu (\widehat{N}_\mu + c_\mu), \quad (1.19)$$

qui redonne la bonne expression lorsqu'on le fait agir sur les états de Fock.

1.3 Opérateurs champs, équations de Maxwell dans le vide

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes intéressés qu'aux aspects corpusculaires de la lumière, et il nous reste à faire le lien avec la description ondulatoire fournie par les équations de Maxwell. D'un point de vue expérimental, le champ électromagnétique est déterminé par la valeur de \mathbf{E} et \mathbf{B} (ou les potentiels associés) en tout point de l'espace, qui doivent donc correspondre à des observables opérant sur l'espace de Hilbert des photons. L'objet de ce paragraphe sera de construire ces observables, dont nous montrerons ensuite que les valeurs moyennes obéissent bien aux équations de Maxwell.

1.3.1 Opérateurs champs

Comme nous l'avons discuté ci-dessus, le but de cette partie est de construire les observables $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ et $\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ correspondant à la mesure des champs électrique et magnétique en un point \mathbf{r} donné de l'espace. À ce titre, la position \mathbf{r} n'est qu'un *paramètre* définissant le point de mesure, et n'est donc pas elle-même une observable, contrairement à la situation considérée dans le formalisme habituel.

En mécanique quantique, on caractérise la dynamique d'un système par son hamiltonien \widehat{H} (l'énergie) dont on obtient l'expression par le Principe de Correspondance consistant à remplacer les observables physiques par les opérateurs de l'espace de Hilbert associés. En électromagnétisme classique, la densité d'énergie électromagnétique est donnée par $\varpi = \epsilon E^2/2 + B^2/2\mu_0$. En mécanique quantique on définira le hamiltonien par

¹¹. Pour un oscillateur harmonique, on a ainsi $c_\mu = 1/2$, ce qui se trouve être aussi la valeur à prendre pour retrouver l'électromagnétisme classique.

$$\widehat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{2} \left(\varepsilon_0 \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})^2 + \widehat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r})/\mu_0 \right), \quad (1.20)$$

et nous déterminerons les expressions de $\widehat{\mathbf{E}}$ et $\widehat{\mathbf{B}}$ de façon à ce que ce hamiltonien se mette sous la forme (1.19). Afin de simplifier notre recherche, nous allons plutôt tenter d'exprimer les champs en termes des potentiels électromagnétiques : en effet, plutôt que d'avoir à manipuler deux champs vectoriels, nous n'aurons à utiliser qu'un champ vectoriel (le potentiel vecteur \mathbf{A}) et un champ scalaire (le potentiel scalaire V).

Il peut sembler au premier abord paradoxal de prendre comme objets centraux de la théorie que nous allons développer des quantités n'ayant pas d'interprétation physique directe, puisque plusieurs potentiels décrivent le même champ électromagnétique. En effet, on rappelle que si f est un champ scalaire quelconque, le changement de jauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f \quad (1.21)$$

$$V \rightarrow V - \partial_t f, \quad (1.22)$$

laisse inchangés \mathbf{E} et \mathbf{B} . Afin de se convaincre néanmoins de la réalité physique du potentiel vecteur, considérons l'expérience de pensée suivante¹² : on prend un solénoïde infini parcouru par un courant I . On sait dans ce cas que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde (et vaut $B_0 = \mu_0 n I$, où n est le nombre de spires par mètre) et nul à l'extérieur. Le potentiel vecteur \mathbf{A} est quant-à lui non nul, et par symétrie est orienté dans la direction orthoradiale $\mathbf{A} = A(r)\mathbf{u}_\theta$. En intégrant la relation $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ sur un cercle de rayon r centré sur l'axe du solénoïde, on en déduit que $2\pi r A = \Phi(r)$, où Φ désigne le flux de \mathbf{B} à travers le cercle. Or si r est supérieur au rayon a du solénoïde, Φ est constant et vaut $\Phi_0 = \pi a^2 B_0$, soit $A(r) = \Phi_0/2\pi r$. Imaginons que l'on enserre le solénoïde par une spire de rayon R et que l'on module le courant I . D'après la loi de Faraday, il apparaît une fem d'induction dans la spire, associée à la variation de Φ . Si l'on suppose que le champ magnétique est la grandeur physique pertinente, on constate que dans cette situation, il y a une action "à distance" du champ \mathbf{B} sur la spire, puisque $\mathbf{B} = 0$ sur la spire. Ce paradoxe est cependant levé si l'on admet que c'est le potentiel vecteur qui a un sens, auquel cas on sait que la fem résulte du champ électrique induit $\partial_t \mathbf{A}$, qui lui est non nul sur la spire. Autrement dit, si l'on veut décrire une interaction *locale*, il faut faire intervenir \mathbf{A} plutôt que \mathbf{B} - ce que l'on retrouve par exemple dans l'écriture du hamiltonien d'interaction d'un champ magnétique avec une particule classique ou quantique. L'argument a été étendu au cas quantique par Aharonov et Bohm [1]. Dans cette expérience, on réalise une expérience de fentes d'Young en plaçant le solénoïde entre les deux fentes. Aharonov et Bohm ont montré qu'il devait apparaître un déphasage entre les deux bras de l'interféromètre proportionnel au flux enserré par le solénoïde. Comme dans le cas de l'induction, on observe un effet sur les

12. Ceci sans compter que $(\mathbf{A}, V/c)$ constitue un 4-vecteur relativiste.

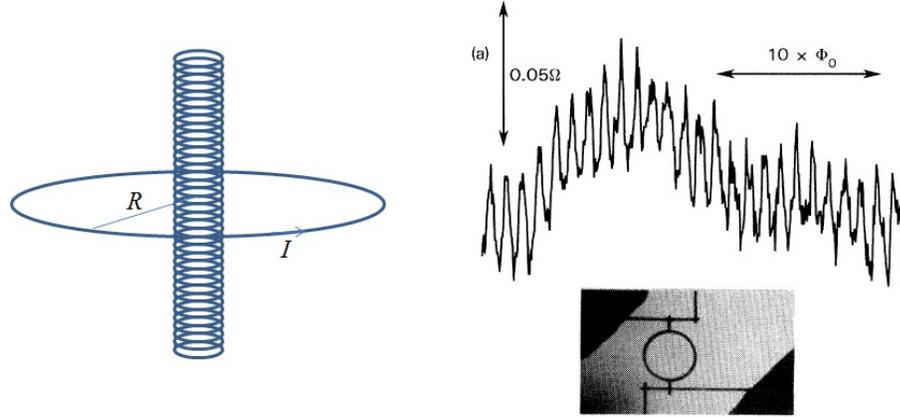


FIGURE 1.4 – Réalité physique du potentiel vecteur. Gauche : induction par un solénoïde ; Droite : observation de l'Effet Aharonov-Bohm dans les oscillations de la magnéto-résistance d'un anneau mésoscopique de 784 nm de diamètre en fonction du flux Φ_0 (Figure extraite de [11]).

particules dans une région où le champ est nul, mais pas le potentiel. Cet effet prédit dans les années 50 a pu être vérifié expérimentalement directement sur des faisceaux d'électrons [4] ainsi que sur des anneaux mésoscopiques [11] - voir Fig. 1.4.

La liberté de jauge nous permet de fixer une condition sur le potentiel vecteur. Dans le cadre non-relativiste, la jauge la plus adaptée est la jauge de Coulomb dans laquelle on impose $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Dans l'espace de Fourier, cette relation se traduit par $i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = 0$, ce qui implique que la transformée de Fourier $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ du potentiel vecteur est orthogonale à \mathbf{k} . Par ailleurs, si l'on écrit l'équation de Maxwell-Gauss, on a dans le vide $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, et donc puisque $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$, on a $\nabla^2 V = 0$. Si l'on impose par ailleurs au potentiel de s'annuler à l'infini, alors d'après l'unicité des solutions de l'équation de Poisson, on a $V = 0$, autrement dit, dans cette jauge et dans le vide, le champ électromagnétique n'est caractérisé que par un potentiel vecteur transverse.

Dans la suite, nous décomposerons le potentiel vecteur dans l'espace de Fourier, ce qui revient à décomposer le champ électromagnétique en ondes planes. De façon à ce que son énergie reste bornée, nous travaillerons dans un volume fini, aux bornes duquel nous imposerons des conditions aux limites périodiques. Ceci revient à quantifier les vecteurs d'ondes dans l'espace de Fourier qui peuvent prendre les valeurs $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$, où \mathbf{n} est un vecteur à coordonnées entières (voir appendice).

Considérons l'observable quantique potentiel vecteur $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$. On peut décomposer celle-ci en série de Fourier, ce qui nous permet d'écrire

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.23)$$

En utilisant la jauge de Coulomb, le vecteur $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ est orthogonal à \mathbf{k} ce qui permet de le décomposer sur la base \mathbf{e}_{μ} utilisée pour décrire la polarisations des photons¹³. On réécrit alors la somme comme

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\mu} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu} \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.24)$$

Enfin, comme \widehat{A} est une observable, c'est un opérateur hermitien, ce qui impose la condition $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}^{\dagger} = \widehat{\mathcal{A}}_{\bar{\mu}}$, où $\bar{\mu} = (-\mathbf{k}, \sigma_{\mu})$. La connaissance de l'observable \widehat{A} nous permet ensuite de définir les observables champs électrique et magnétique. En effet, on a tout d'abord $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et donc

$$\widehat{\mathbf{B}} = \sum_{\mu} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu} i\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.25)$$

Pour ce qui est du champ électrique, on a classiquement $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$. Les observables ne dépendant pas du temps, cette relation n'est plus directement applicable et n'est vrai que pour les valeurs moyennes¹⁴, ce qui nous permet d'écrire $\langle \widehat{\mathbf{E}} \rangle = -\partial_t \langle \widehat{\mathbf{A}} \rangle$. Or, d'après le théorème d'Ehrenfest (cf. appendice 1.7.2), on a

$$i\hbar \partial_t \langle \widehat{\mathbf{A}} \rangle = \langle [\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{H}] \rangle, \quad (1.26)$$

soit

$$\langle \widehat{\mathbf{E}} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{H}] \rangle. \quad (1.27)$$

Cette relation étant valable pour tout état, on a finalement

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\hbar} [\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{H}] = \frac{i}{\hbar} \sum_{\mu} [\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}, \widehat{H}] \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.28)$$

On peut ensuite réécrire le hamiltonien (1.20) en fonction des opérateurs $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}$. On obtient alors

$$\widehat{H} = L^3 \sum_{\mu} \left(\frac{\varepsilon_0}{2\hbar^2} [\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}, \widehat{H}]^{\dagger} [\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}, \widehat{H}] + \frac{k^2}{2\mu_0} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu}^{\dagger} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu} \right), \quad (1.29)$$

qu'il nous faut identifier à l'expression

$$\widehat{H} = \sum_{\mu} \frac{\hbar\omega_{\mu}}{2} (\widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \widehat{a}_{\mu} + \widehat{a}_{\mu} \widehat{a}_{\mu}^{\dagger}). \quad (1.30)$$

13. Nous travaillerons ici dans une base de polarisations linéaires de façon à ne considérer que des \mathbf{e}_{μ} réels.

14. Remarquons qu'en se plaçant dans la représentation de Heisenberg, on peut se débarrasser des valeurs moyennes.

On constate que d'une part les deux formes découplent les différents modes μ et que d'autre part, il sont quadratiques en \hat{a}_μ et \hat{A}_μ respectivement. Ceci suggère que chercher l'amplitude du potentiel vecteur sous la forme $\hat{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^0 \hat{a}_\mu$. Cependant, nous avons vu que la condition d'hermiticité de \hat{A} imposait d'avoir $\hat{A}_\mu^\dagger = \hat{A}_{\bar{\mu}}$ ce qui couple les modes μ et $\bar{\mu}$ et n'est pas satisfait pas la forme précédente. Une façon d'y remédier est de généraliser notre forme à $\hat{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^0 (\hat{a}_\mu + \hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger)$. En utilisant cette forme pour le potentiel vecteur, la condition d'hermiticité est en effet satisfaite, et l'on obtient dans l'équation (1.29)

$$\hat{H} = \sum_{\mu} \left[\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu^2 \mathcal{A}_\mu^0{}^2 (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu \hat{a}_\mu^\dagger) \right]. \quad (1.31)$$

Si l'on compare avec l'expression (1.30) obtenue dans le formalisme de seconde quantification, les deux hamiltoniens sont identiques à condition de prendre

$$\mathcal{A}_\mu^0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu}}. \quad (1.32)$$

On en déduit donc l'expression des opérateurs champs

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{e}_\mu + \text{h.c.}] \quad (1.33)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar \omega_\mu}{2\varepsilon_0 L^3}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{e}_\mu - \text{h.c.}] \quad (1.34)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_\mu - \text{h.c.}] \quad (1.35)$$

1.3.2 Retour sur les équations de Maxwell dans le vide

Nous allons montrer que les valeurs moyennes des observables $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ que nous venons d'introduire obéissent bien aux équations de Maxwell. Commençons donc par les équations portant sur les divergences de \mathbf{E} et \mathbf{B} . On a par exemple dans le cas du champ électrique

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = - \sum_{\mu} \omega_\mu \mathcal{A}_\mu^0 (e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{e}_\mu + \text{h.c.}) = 0, \quad (1.36)$$

car la polarisation des photons est transverse. En prenant la valeur moyenne sur l'état des photons, on en déduit donc que $\langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle = 0$ et de même pour $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

Intéressons nous ensuite à l'équation de Maxwell-Faraday. Pour cela, il nous faut évaluer $\partial_t \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle$, où la dépendance temporelle provient de l'évolution du vecteur d'état. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, on a

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{a}_\mu \rangle}{dt} = \langle [\hat{a}_\mu, \hat{H}] \rangle. \quad (1.37)$$

Le commutateur se calcule sans difficulté puisque l'on a

$$[\hat{a}_\mu, \hat{H}] = \sum_{\mu'} \hbar\omega_{\mu'} [\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\mu'}^\dagger \hat{a}_{\mu'}] = \hbar\omega_\mu [\hat{a}_\mu, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu], \quad (1.38)$$

puisque d'après l'équation (1.16) les opérateurs création et annihilation de modes distincts commutent. Le dernier commutateur se calcule en utilisant l'identité $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ qui nous donne d'après (1.15) $[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu] = \hat{a}_\mu$ et donc

$$i \frac{d\langle \hat{a}_\mu \rangle}{dt} = \omega_\mu \langle \hat{a}_\mu \rangle. \quad (1.39)$$

D'après la relation (1.39), nous voyons que $\partial_t \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle$ peut s'écrire

$$\partial_t \langle \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mu} \mathcal{A}_\omega (e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r}} (-i\omega_\mu \langle \hat{a}_\mu \rangle) i\mathbf{k}_\mu \wedge \mathbf{e}_\mu - \text{h.c.}), \quad (1.40)$$

soit puisque $\nabla \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = i\mathbf{k} \cdot \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

$$\partial_t \langle \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \wedge \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.41)$$

En raisonnant de même sur $\partial_t \langle \mathbf{E} \rangle$, on retrouve sans difficulté l'équation de Maxwell-Ampère.

1.4 Fluctuations quantiques du champ électromagnétique

Le résultat fourni par le paragraphe précédent peut paraître décevant : quel intérêt y a-t-il à développer un formalisme quantique si, à la fin, on retrouve les équations de Maxwell ? Plus généralement, quelles sont réellement les spécificités de la théorie de l'électrodynamique quantique que nous venons de développer, par rapport à l'optique classique héritée du XIXème siècle ? Si l'on veut observer des effets réellement quantiques, il ne faut pas s'intéresser aux valeurs moyennes des observables champs, qui comme on l'a vu obéissent aux équations de Maxwell. Il faut plutôt s'intéresser aux *fluctuations* autour de cette valeur moyenne, comme nous le verrons dans les quelques exemples ci-dessous, et de façon plus détaillée au chapitre suivant.

L'idée peut paraître paradoxale, car traditionnellement, ce qu'il convient d'appeler du bruit est considéré comme une nuisance dont il faut au maximum s'affranchir pour parvenir à des résultats expérimentaux aussi précis que possible. Cependant, au cours du XXème siècle, il est apparu que dans un grand nombre de situations physique, une fois éliminé le bruit technique dû aux imperfections expérimentales, il pouvait rester des fluctuations inhérentes au système

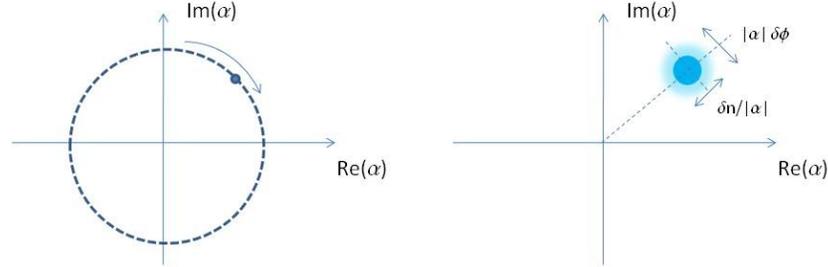


FIGURE 1.5 –

étudié et dont la caractérisation pouvait apporter de précieuses informations. Historiquement, c'est Einstein qui le premier a pris conscience de cette opportunité dans son travail de 1905 sur le mouvement Brownien où il montre que l'étude du mouvement erratique de grains de pollen mis en évidence par Brown pouvait s'interpréter quantitativement par l'agitation thermique des molécules d'eau et permettait de mesurer le nombre d'Avogadro. Un peu plus tard, Johnson et Nyquist démontrèrent qu'à température finie, la tension aux bornes d'un conducteur ohmique subissait des fluctuations dont l'amplitude était proportionnelle à la résistance et la température. Dans le cas de l'optique, une première expérience due à Hanbury-Brown et Twiss montra que l'étude des corrélations de fluctuations d'intensité lumineuse mesurées par deux capteurs spatialement séparés permettaient de mettre en œuvre un nouveau type d'interférométrie qui leur permit de mesurer la taille de l'étoile Sirius. Leur intuition fut par la suite formalisée par Roy Glauber que l'on considère comme le père de l'optique quantique moderne et qui reçut le prix Nobel 2005 pour ces travaux. Mentionnons pour finir que l'étude des fluctuations du rayonnement fossile issu du Big-Bang et baignant l'univers d'un rayonnement du corps noir à ~ 2.7 K a fait l'objet d'études récentes par les satellites COBE (lancé en 1989), WMAP (en 2001) et Planck (en 2009) qui ont permis d'en extraire des informations précieuses sur la structure de l'univers à grande échelle (notamment la courbure de l'espace temps ou la quantité de matière noire et d'énergie noire).

1.4.1 Variables normales, représentation quasi-classique d'un état du champ.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'état du champ électromagnétique est complètement caractérisé en jauge de Coulomb par la donnée de son potentiel vecteur \mathbf{A} . Pour un champ classique, on peut représenter le potentiel vecteur associé au mode μ par un nombre complexe α_μ (appelée variable normale) tel que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_{\mu}}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \alpha_{\mu}(t) \mathbf{e}_{\mu} + \text{c.c.}], \quad (1.42)$$

auquel cas, en comparant avec l'expression quantique, α_{μ} n'est rien d'autre que la valeur moyenne de de l'opérateur \hat{a}_{μ} . Classiquement, l'état du mode μ à un instant t est donc représenté par un point du plan complexe. D'après (1.39), on constate que l'évolution libre de α_{μ} est décrite par la relation $\alpha_{\mu}(t) = \alpha_{\mu}(0) \exp(-i\omega_{\mu}t)$ et décrit par conséquent un cercle dans le plan complexe à la pulsation ω_{μ} . Cette dépendance temporelle correspond à la décomposition du champ en ondes planes progressives monochromatiques, et le module de α (ou plutôt son module carré) représente, à un facteur numérique près, l'énergie (ou le nombre de photons) dans le mode, et son argument la phase du mode.

Quantiquement, la valeur de \hat{a} n'est en générale pas définie et peut fluctuer d'une mesure à l'autre. L'état du champ va par conséquent être représenté par une tache dans l'espace des phases, dont l'extension dans les directions radiales et orthoradiales vont représenter les fluctuations de phase et de nombre de photons du champ électromagnétique. La surface minimale de cette tache est donnée par la relation d'incertitude temps énergie $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$. En effet, l'énergie du mode vaut $\hbar\omega_{\mu}n$ et la phase du champ à l'instant t est $\varphi = \omega_{\mu}t + \varphi_0$. En différenciant ces relations, on déduit de l'inégalité temps énergie que $\delta n \delta \varphi \gtrsim 1$.

Précisons cette relation en considérant l'état d'un champ quasi-classique dont la variable normale fluctue peu autour de sa valeur moyenne α . Ceci revient à dire que si l'on pose $\hat{a} = \bar{\alpha} + \delta\hat{a}$, les valeurs prises par $\delta\hat{a} = \hat{a} - \bar{\alpha}$ sont resserrées autour de 0. Considérons le nombre de photons dans le mode. L'observable correspondante \hat{n} peut s'écrire sous la forme $\hat{n} = |\bar{\alpha}|^2 + \delta\hat{n} + \dots$, avec

$$\delta\hat{n} = \bar{\alpha}^* \hat{a} + \bar{\alpha} \hat{a}^{\dagger} - 2|\bar{\alpha}|^2. \quad (1.43)$$

Classiquement, la phase de α (son argument) peut être définie par $\tan \varphi = \alpha''/\alpha'$, où l'on a posé $\alpha = \alpha' + i\alpha''$. Si l'on suppose que α est une variable aléatoire fluctuant faiblement autour de sa valeur moyenne $\bar{\alpha}$, la fluctuation de la phase peut s'écrire

$$\frac{\delta\varphi}{\cos^2 \bar{\varphi}} = \frac{\bar{\alpha}' \delta\alpha'' - \bar{\alpha}'' \delta\alpha'}{\alpha'^2}. \quad (1.44)$$

En notant que $\cos \bar{\varphi} = \bar{\alpha}'/|\bar{\alpha}|$ et que $\delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$, on en déduit que

$$\delta\varphi = \frac{\text{Im}(\alpha\bar{\alpha}^*)}{|\bar{\alpha}|^2} = \frac{\alpha\bar{\alpha}^* - \alpha^*\bar{\alpha}}{2i|\bar{\alpha}|^2}. \quad (1.45)$$

Quantiquement, on remplace α par l'opérateur \hat{a} , ce qui permet de définir l'opérateur fluctuation de la phase par

$$\delta\hat{\varphi} = \frac{\bar{\alpha}^* \hat{a} - \bar{\alpha} \hat{a}^{\dagger}}{2i|\bar{\alpha}|^2}. \quad (1.46)$$

Le commutateur de $\delta\hat{n}$ et $\delta\hat{\varphi}$ se déduit alors sans difficulté de la condition $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ et l'on a alors

$$[\delta\hat{n}, \delta\hat{\varphi}] = i \quad (1.47)$$

En utilisant la relation d'Heisenberg $\Delta A \Delta B \geq |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|/2$, on en déduit que

$$\Delta n \Delta \varphi \geq \frac{1}{2}. \quad (1.48)$$

Illustrons cette inégalité dans le cas limite d'un état de Fock où le nombre de photon est parfaitement défini. Afin de simplifier la discussion, on ne considère ici qu'un seul mode du champ électromagnétique et l'on injecte à $t = 0$ n photons dans le mode considéré. On constate alors que le champ électrique moyen $\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle$ associé à cet état vaut 0, puisque l'on peut l'écrire

$$\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = \langle n | i \mathcal{E}_0 \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \right) | n \rangle = 0, \quad (1.49)$$

car l'action de \hat{a} et \hat{a}^\dagger donnent naissance aux états $|n+1\rangle$ et $|n-1\rangle$ par définition orthogonaux à $|n\rangle$. L'état $|n\rangle$ étant un état propre du hamiltonien, le système va y rester à tout instant ultérieur, et donc à tout t , on aura $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = 0$. Ce résultat s'interprète immédiatement à la lumière de l'inégalité de Heisenberg puisque dans le cas présent, $\delta n = 0$ et donc $\delta \varphi = \infty$. La phase du champ électromagnétique est complètement indéterminée et donc les mesures successives du champ se brouillent du fait des fluctuations de phase.

1.4.2 Fluctuations quantiques du vide

La conséquence la plus directe et la plus paradoxale du formalisme développé ici est l'existence d'un champ électromagnétique fluctuant dans le vide (ou dit autrement en l'absence de photons). En effet, si l'on s'intéresse à l'énergie électromagnétique la formule (1.30) prédit que pour $n_\mu = 0$, il existe une énergie résiduelle

$$E_{\text{vide}} = \sum_{\mu} \frac{\hbar \omega_{\mu}}{2}. \quad (1.50)$$

Comme la densité d'énergie électromagnétique vaut $\varpi = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0$, ceci signifie nécessaire que E^2 , B^2 ou les deux possèdent une valeur moyenne non nulle (en fait un théorème d'équipartition montre que les contributions électriques et magnétiques sont égales). L'existence et la mise en évidence de ces fluctuations posent d'évidents problèmes. Tout d'abord, prise formellement, l'expression (1.50) est divergente et implique donc une densité d'énergie en principe infinie¹⁵. On peut se débarrasser formellement de ce problème en repérant

15. Cette divergence n'est que l'une des nombreuses surgissant en électrodynamique quantique et dans lesquelles les physiciens du milieu du XXème siècle ont longtemps été empêtrés sans savoir quel sens donner à ces résultats infinis. La situation a été par la suite clarifiée grâce

les énergies par rapport à E_{vide} auquel cas la théorie redevient finie, mais on se retrouve alors confronté à un nouveau paradoxe : s’il est si facile de “balayer” E_{vide} sous le tapis, qu’en est-il des fluctuations de \mathbf{E} et \mathbf{B} ? Par ailleurs, si ces fluctuations existent réellement, comment les observer ? En effet, la détection d’un signal électromagnétique nécessite un transfert d’énergie du champ au photodétecteur. Comme le vide est par définition l’état d’énergie minimale du champ électromagnétique, il ne peut pas exciter le détecteur qui ne sera donc pas sensible aux fluctuations de points zéros.

Déplacement de Lamb du niveau 2S de l’atome d’hydrogène

Dans la théorie de Schrödinger de l’atome d’hydrogène, les niveaux 2S et 2P sont dégénérés. Cependant, lorsque l’on inclue les effets relativistes en utilisant l’équation de Dirac, on trouve que le niveau 2P se scinde en deux sous-niveaux, notés $2P_{1/2}$ et $2P_{3/2}$ formant la structure fine de l’atome d’hydrogène¹⁶. Dans la théorie de Dirac, les niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ restent cependant en principe dégénérés. En 1947, Lamb et Retherford mirent expérimentalement en évidence une levée de dégénérescence de ces deux niveaux d’environ 1 GHz, ce que l’on nomme depuis le *déplacement de Lamb* [10], qui fut rapidement interprété par Bethe comme un effet des fluctuations du vide électromagnétique [3]. Cette mesure constituant la première manifestation expérimentale des effets d’électrodynamique quantique fournissait donc la possibilité de tester les théories quantiques du rayonnement de l’époque.

Le calcul exact de cet effet relève d’un formalisme trop avancé pour le présent propos, et nous nous contenterons d’une approche semi-classique proposée par T. Welton [12]. Dans cette approche, si l’on adopte une description classique du mouvement de l’électron, on remarque que celui-ci est libre, la position \mathbf{r} de son centre de masse fluctue sous l’effet des fluctuations quantiques du champ électrique selon l’équation

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.51)$$

où \mathbf{E} désigne le champ électrique fluctuant du vide. L’existence de ces fluctuations implique que l’électron explore une sphère de rayon $\sim \rho$. Dans le cas d’un atome d’hydrogène, l’énergie d’interaction de l’électron avec le noyau est donc moyennée sur cette sphère. Si l’on met la position de l’électron sous la forme $\bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}$, où $\bar{\mathbf{r}}$ est la position moyenne de l’électron. L’énergie vue par l’électron est donc

au développement des techniques de renormalisation inventées notamment par R.P. Feynman et généralisée par Wilson.

16. En notation spectroscopique un état nL_J est caractérisé par un nombre quantique principal n , un moment cinétique orbital L et un moment cinétique *total* (orbital + spin) J . Comme $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, les valeurs permises pour J sont comprises entre $|L - S|$ et $L + S$. Pour un niveau P ($L = 1$) et un électron de spin $1/2$, les valeurs permises pour J sont donc $J = 1/2$ et $J = 3/2$, alors que pour le niveau S, $L = 0$ et la seule valeur permise pour le moment cinétique total est $J = 1/2$

$$V(\bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}) = V(\bar{\mathbf{r}}) + \sum_i \rho_i \partial_i V + \frac{1}{2} \sum_{ij} \rho_i \rho_j \partial_{ij} V + \dots \quad (1.52)$$

Le premier terme correspond au potentiel coulombien. Moyenné sur les fluctuations quantiques du champ, le deuxième terme disparaît puisque par définition $\langle \rho_i \rangle = 0$. Enfin, le troisième terme donne naissance à une moyenne non-nulle, avec $\langle \rho_x^2 \rangle = \langle \rho_y^2 \rangle = \langle \rho_z^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle / 3$ et $\langle \rho_i \rho_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. On en déduit donc que

$$\langle V \rangle = V(r) + \frac{\langle \rho^2 \rangle}{6} \nabla^2 V(r). \quad (1.53)$$

D'après la relation

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta(\mathbf{r}), \quad (1.54)$$

on voit que les fluctuations de champ électrique du vide donnent lieu à un nouveau terme dans le potentiel d'interaction, localisé à l'origine. Comme les états S sont les seuls à posséder une fonction d'onde non-nulle en 0, on voit que ce sont les seuls à être influencés par les fluctuations du vide et explique la levée de dégénérescence entre états S et P.

Il resterait en principe à évaluer $\langle \rho^2 \rangle$. Si l'on décompose le champ électrique selon ses modes propres, on constate que l'amplitude des fluctuations de l'électron à la fréquence ω_μ est simplement $\rho_\mu = -q_e \mathcal{E}_\mu / m\omega^2$.

La valeur moyenne du champ électrique dans le vide se calcule sans difficulté et formellement s'écrit

$$\langle \hat{\rho}^2 \rangle = \frac{q_e^2}{m^2} \sum_\mu \frac{\hbar}{\varepsilon_0 2\omega_\mu^3 V}. \quad (1.55)$$

Si l'on transforme la somme en une intégrale en passant à la limite thermodynamique $V \rightarrow \infty$, on obtient

$$\langle \hat{\rho}^2 \rangle = \frac{q_e^2}{2m^2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{\varepsilon_0 c^3 k^3}. \quad (1.56)$$

En intégrant en coordonnées sphériques, on pose $d^3 \mathbf{k} = 4\pi k^2 dk$. On constate que l'intégrand varie en $1/k$ et aboutit à une divergence logarithmique aux petites et aux grandes valeurs de k . On fixe la coupure infrarouge à $k \sim 1/a_0$ où a_0 est le rayon de Bohr. En effet, lorsque la longueur d'onde devient grande devant la taille de l'atome, le rayonnement n'est plus capable de "résoudre" l'électron individuel et l'équation (1.51) n'est plus valable. La coupure ultraviolette est fixée par l'entrée dans le domaine relativiste. En effet, pour des photons de haute énergie, le transfert d'impulsion aux électrons est importante et peut les amener dans le domaine relativiste. Après absorption d'un photon, la vitesse de l'électron vaut $v \sim \hbar k / m$ et devient donc relativiste pour $k \sim mc / \hbar = \lambda_c^{-1}$, où

λ_c désigne la longueur d'onde de Compton. On obtient donc dans cette approximation

$$\langle \widehat{\rho}^2 \rangle = \frac{2e^2 \hbar}{\pi m^2 c^3} \ln(\lambda_c/a_0). \quad (1.57)$$

De cette analyse on déduit d'après l'équation (1.53) que les fluctuations du vide ajoutent au potentiel coulombien en $1/r$ une contribution

$$\widehat{V}_{\text{QED}} = \frac{4e^4 \hbar}{3m^2 c^3} \ln(\lambda_c/a_0) \delta(\mathbf{r}). \quad (1.58)$$

Si l'on traite ce terme en perturbation à l'ordre 1, il donne une déviation

$$\delta E = \langle \psi | \widehat{V}_{\text{QED}} | \psi \rangle = \frac{4e^4 \hbar}{3m^2 c^3} \ln(\lambda_c/a_0) |\psi(0)|^2. \quad (1.59)$$

Dimensionnellement, $|\psi(0)|^2$ est de l'ordre de $1/a_0^3$ et donne donc un décalage de l'ordre du GHz, en accord avec les mesure expérimentales.

Effet Casimir

Une autre manière de sonder les fluctuations du vide est de modifier la structure des modes propres en changeant la taille du volume de quantification. Concrètement, plus le volume est important et plus les modes propres du champ électromagnétique sont resserrés. Comme chaque mode contribue à une énergie $\hbar\omega/2$ dans le vide, on obtient donc dans un intervalle de fréquence donné des densités spectrales de fluctuations d'énergie d'autant plus importantes que la boîte est grande.

Cette idée a été exploitée par H.B.G. Casimir pour proposer une mise en évidence expérimentale des fluctuations du vide. L'idée se fonde sur l'égalité entre pression de radiation sur un conducteur parfait et densité d'énergie électromagnétique¹⁷. Si l'on considère un miroir parfaitement conducteur, il s'exerce sur chaque face une pression de radiation due aux fluctuations d'énergie du vide de part et d'autre du miroir. Par symétrie, lorsque le miroir est seul, les pressions sur chaque face se compensent et la résultante de la pression de radiation est nulle. Considérons à présent le cas d'une cavité constituée de deux miroirs en vis-à-vis et séparés d'une distance L . Dans la cavité, les modes sont moins resserrés qu'à l'extérieur, ce qui implique donc une pression de radiation du vide plus faible sur la face interne des miroirs. On s'attend par conséquent à une force nette tendant à attirer les deux miroirs. Dans son article original, Casimir dérive l'expression exacte de la force par unité de surface s'exerçant sur chaque miroir. On se contente ici d'une analyse dimensionnelle qui permet de retrouver - à un facteur numérique près - la formule exacte (pour un calcul rigoureux, on pourra se référer à [8]).

17. À l'angle d'incidence près, comme on s'en convainc en étudiant la réflexion d'un photon sur une surface réfléchissante.

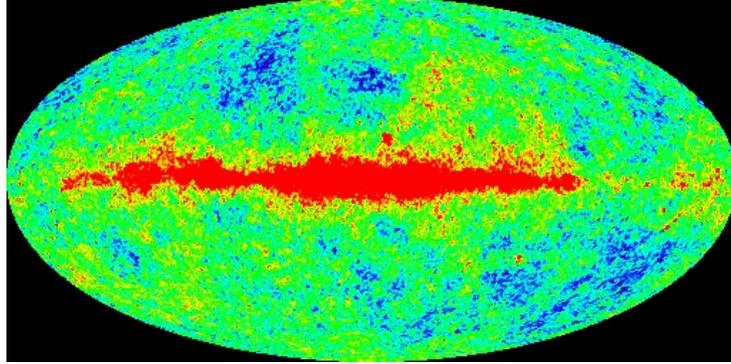


FIGURE 1.6 – Fluctuations du Rayonnement Cosmologique mesurées par la mission WMAP.

Dans le problème de la force de Casimir, la pression s'exerçant sur les miroirs n'est fonction que de la distance L (la distance entre miroirs), \hbar (car le problème est d'essence quantique) et c (car la vitesse de la lumière caractérise les phénomènes électromagnétiques), les miroirs étant supposés ici parfaits, il n'y a pas besoin de paramètres physiques supplémentaires pour caractériser leurs propriétés. On écrit donc la pression sous la forme

$$P \propto L^\alpha \hbar^\beta c^\gamma. \quad (1.60)$$

La résolution de l'équation aux dimensions correspondantes aboutit après un calcul sans difficulté aux valeurs suivantes $\alpha = -4$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$, ce qui est confirmé par le résultat de Casimir

$$P = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 L^4}. \quad (1.61)$$

Énergie du vide et cosmologie

La soustraction de l'énergie du vide pour se débarrasser de sa valeur infinie n'est en réalité réalisable que si l'on néglige la gravité. En effet dans le cas contraire, d'après la loi d'Einstein $E = mc^2$ toute forme d'énergie contribue à la densité de masse et agit donc comme une source de champ de gravitation. L'énergie de point zéro infinie (ou tout du moins très grande) va donc induire une importante courbure de l'espace-temps et un calcul de relativité générale montre que le rayon de courbure de l'univers devrait être de l'ordre de grandeur de la distance Terre-Lune.

les mesures astrophysiques les plus récentes de l'expansion galactique résultant de l'analyse de supernovae ou du rayonnement cosmologique indiquent cependant l'existence d'une "énergie sombre" pouvant résulter des fluctuations des différents champs quantiques du modèle standard. Cependant, la valeur expérimentale de la densité d'énergie noire est des dizaines d'ordres de grandeur plus

faible que celle prédite par la physique quantique et la réconciliation de ces deux valeurs reste un des problèmes ouverts de la physique contemporaine.

1.5 Couplage à une source classique

1.5.1 Équations de Maxwell en présence de sources de courant

On s'intéresse ici au problème classique de rayonnement par une antenne que l'on décrit par une distribution de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ satisfaisant la condition $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ de façon à conserver une densité de charge nulle. On admet alors que le couplage du courant au champ revient à ajouter un terme d'interaction

$$\hat{H}_1 = - \int (\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r} \quad (1.62)$$

au hamiltonien libre (1.30). La pertinence de ce hamiltonien de couplage peut cependant être discutée *a posteriori*, puisque \hat{H}_1 est local (il couple \mathbf{j} et \mathbf{A} au même point), invariant de jauge (on le vérifie en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski et l'indivergence du courant en régime stationnaire) et invariant relativiste puisque l'intégrant est égal au scalaire de Lorentz $j_\mu A^\mu$.

Montrons que \hat{H}_1 redonne bien les équations de Maxwell pour les valeurs moyennes du champ électromagnétique. Nous n'avons pour cela qu'à vérifier l'équation de Maxwell-Ampère, puisque les trois autres traduisent la transversalité du champ et la relation entre \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{A} . Commençons par réexprimer \hat{H}_1 dans la base des états μ . Puisque \mathbf{j} est de divergence nulle, c'est un champ de vecteur transverse dans l'espace de Fourier et on peut donc le décomposer comme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} j_{\mu}(t) e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mu}, \quad (1.63)$$

où les j_{μ} sont des fonctions du temps à valeurs complexes. Soit $\mu = (\mathbf{k}, \sigma)$, on note $\bar{\mu} = (-\mathbf{k}, \sigma)$ correspondant au mode de vecteur d'onde opposé à celui de μ et de même polarisation. On fait par ailleurs l'hypothèse que les bases de polarisations associées à \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$ sont identiques, et que l'on a donc $\mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{e}_{\bar{\mu}}$. Avec ces notations, et en faisant le changement de variable $\mu = \bar{\mu}'$, on note que \mathbf{j} peut aussi s'écrire comme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu'} j_{\bar{\mu}'}(t) e^{i\mathbf{k}_{\bar{\mu}'} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\bar{\mu}'} = \sum_{\mu'} j_{\bar{\mu}'}(t) e^{-i\mathbf{k}_{\mu'} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mu'} \quad (1.64)$$

En passant au complexe conjugué et en notant que μ' étant une variable muette peut être rebaptisé μ , on trouve que

$$\mathbf{j}^*(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} j_{\bar{\mu}}^*(t) e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mu} \quad (1.65)$$

Le courant étant une grandeur réelle, et par unicité de la décomposition de Fourier, on trouve, en comparant à (1.63), que $j_{\bar{\mu}} = j_{\mu}^*$. Calculons alors \widehat{H}_1 en fonction des j_{μ} . On a en écrivant explicitement les sommes sur les différents modes

$$\int d^3\mathbf{r} \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \right) = - \int d^3\mathbf{r} \sum_{\mu, \mu'} A_{\mu}^0 j_{\mu'}(t) \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu'} e^{i\mathbf{k}_{\mu'} \cdot \mathbf{r}} \left(\widehat{a}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} + \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (1.66)$$

Les intégrales spatiales se calculent sans difficulté, et ne sont non nulles que pour $\mathbf{k}_{\mu} = \mathbf{k}_{\mu'}$ (resp. $\mathbf{k}_{\mu} = -\mathbf{k}_{\mu'}$) pour le terme en $\widehat{a}_{\mu}^{\dagger}$ (resp. \widehat{a}_{μ}). En ajoutant la condition d'égalité des polarisations imposée par le produit scalaire $\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu'}$, on en déduit que la somme sur μ' se résume à $\mu' = \mu$ (resp. $\mu' = \bar{\mu}$), soit

$$\widehat{H}_1 = -L^3 \sum_{\mu} A_{\mu}^0 \left(j_{\mu}^* \widehat{a}_{\mu} + j_{\mu} \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \right). \quad (1.67)$$

On remarque que le hamiltonien total $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1$ se met sous la forme d'une somme d'opérateurs découplés n'opérant chacun que sur un seul mode μ , à savoir

$$\widehat{H} = \sum_{\mu} \left[\hbar \omega_{\mu} (\widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \widehat{a}_{\mu} + 1/2) - A_{\mu}^0 L^3 \left(j_{\mu}^*(t) \widehat{a}_{\mu} + j_{\mu}(t) \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \right) \right], \quad (1.68)$$

ce qui permet de ne s'intéresser qu'à un seul mode à la fois. Avant de poursuivre, discutons la forme générale de \widehat{H}_1 . On constate que celui-ci ne commute pas avec $\widehat{n}_{\mu} = \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \widehat{a}_{\mu}$, le nombre de photons dans le mode μ , ce qui signifie que le nombre de photons n'est pas constant lorsque le champ électromagnétique est couplé au courant. Plus précisément, on constate que \widehat{H}_1 est linéaire en opérateurs création et annihilation, ce qui s'interprète par l'émission et l'absorption d'un photon à la fois, comme on s'en convainc aisément en étudiant l'effet de \widehat{H}_1 à l'ordre 1 en perturbation.

Pour retrouver la dernière équation de Maxwell, nous allons chercher l'évolution de $\langle \widehat{a}_{\mu} \rangle$ en utilisant comme précédemment le théorème d'Ehrenfest. En procédant de la sorte, on obtient immédiatement

$$i \frac{d\langle \widehat{a}_{\mu} \rangle}{dt} = \omega_{\mu} \langle \widehat{a}_{\mu} \rangle - \frac{A_{\mu}^0 L^3}{\hbar} j_{\mu}(t), \quad (1.69)$$

et en passant au complexe conjugué

$$-i \frac{d\langle \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \rangle}{dt} = \omega_{\mu} \langle \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \rangle - \frac{A_{\mu}^0 L^3}{\hbar} j_{\bar{\mu}}(t). \quad (1.70)$$

En multipliant par $\omega_{\mu} A_{\mu}^0$ et en sommant sur μ , on en déduit d'après la définition de l'opérateur champ électrique (Eq. 1.34)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle}{\partial t} = \sum_{\mu} \left[A_{\mu}^0 k_{\mu}^2 \langle \widehat{a}_{\mu} \rangle \mathbf{e}_{\mu} - \frac{\mu_0}{2} j_{\mu}(t) \right] e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.} \quad (1.71)$$

Le premier terme du membre de droite ainsi que son complexe conjugué vont donner naissance au rotationnel du champ magnétique, puisque d'après l'équation (1.35), on a

$$\nabla \wedge \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mu} A_{\mu}^0 [i\mathbf{k}_{\mu} \wedge (\mathbf{k}_{\mu} \wedge \mathbf{e}_{\mu}) e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \widehat{a}_{\mu} - \text{h.c.}] \quad (1.72)$$

$$= \sum_{\mu} A_{\mu}^0 [k_{\mu}^2 \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \widehat{a}_{\mu} + \text{h.c.}], \quad (1.73)$$

où l'on a utilisé la formule du double produit vectoriel ainsi que la transversalité de \mathbf{e}_{μ} .

Pour ce qui est du second terme de l'équation (1.71), on reconnaît directement la décomposition en série de Fourier de \mathbf{j} . Comme cette grandeur est réelle, elle est égale à son complexe conjugué et l'on obtient donc en définitive

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle}{\partial t} = \nabla \wedge \langle \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \rangle - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1.74)$$

qui n'est autre que l'équation de Maxwell-Ampère en présence d'une densité de courant.

1.5.2 États cohérents du champ électromagnétique

Nous avons montré que le hamiltonien de couplage (1.62) redonnait bien les équations de Maxwell pour la valeur moyenne du champ électromagnétique. Nous allons ici affiner ce résultat et montrer que l'on peut même trouver les solutions exactes de l'équation de Schrödinger pour l'état quantique du champ. Ce résultat nous permettra ainsi d'introduire la famille des états cohérents - aussi appelés états quasi-classiques - qui par définition décrivent un champ classique dans le formalisme quantique.

Dans le cas classique, le potentiel vecteur se met sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} A_{\mu}^0 \left(\alpha_{\mu, \text{cl}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \alpha_{\mu, \text{cl}}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right), \quad (1.75)$$

où la variable normale $\alpha_{\mu, \text{cl}}$ est solution de (1.69), puisque les équations de la théorie quantique redonnent pour les valeurs moyennes des observables les mêmes résultats que dans le cas classique.

Dans le cas quantique, nous allons montrer que, si l'on part d'un champ électromagnétique vide de tout photon, l'état du champ va se mettre à l'instant t sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = \bigotimes_{\mu} |\alpha_{\mu}(t)\rangle, \quad (1.76)$$

où les état $|\alpha_{\mu}(t)\rangle$ sont des états appelés *états cohérents* satisfaisant la condition

$$\widehat{a}_{\mu} |\alpha_{\mu}\rangle = \alpha_{\mu} |\alpha_{\mu}\rangle, \quad (1.77)$$

et où $\alpha_\mu(t)$ est la variable normale associée au problème classique solution de l'équation (1.70).

Afin de démontrer ce résultat, on commence par noter que le hamiltonien décrivant le champ s'écrit comme une somme d'opérateurs opérant chacun sur un seul mode μ . Ceci permet de découpler les différents modes et de ne considérer que le hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) + A^0L^3(j^*(t)\hat{a} + j(t)\hat{a}^\dagger), \quad (1.78)$$

où pour alléger les notations, nous nous sommes débarrassés des indices μ . Supposons qu'à $t = 0$ le champ soit dans l'état vide $|0\rangle$, par définition de l'opérateur évolution, le système sera à l'instant t dans l'état

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|0\rangle, \quad (1.79)$$

où \hat{U} est solution de l'équation

$$i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H}\hat{U} \quad (1.80)$$

avec la condition initiale

$$\hat{U}(0) = 1. \quad (1.81)$$

On introduit alors $\hat{b}(t) = \hat{U}^\dagger\hat{a}\hat{U}$. D'après l'équation (1.80), $\hat{b}(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$i\hbar\frac{d\hat{b}}{dt} = \hat{U}^\dagger[\hat{a}, \hat{H}]\hat{U}, \quad (1.82)$$

avec la condition initiale $\hat{b}(0) = \hat{a}$. Pour calculer le commutateur, on développe le terme d'énergie potentiel dans \hat{H} que l'on écrit

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (1.83)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (1.84)$$

$$\hat{H}_1 = A^0L^3(j^*(t)\hat{a} + j(t)\hat{a}^\dagger) \quad (1.85)$$

Nous avons déjà calculé le commutateur $[\hat{a}, \hat{H}_0]$ dans l'étude des équations de Maxwell dans le vide où nous avons montré que

$$[\hat{a}, \hat{H}_0] = \hbar\omega\hat{a}. \quad (1.86)$$

Le terme en \hat{H}_1 se calcule sans difficulté à l'aide de la condition $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ liant les opérateurs création et annihilation et nous donne

$$[\widehat{a}, \widehat{H}_1] = A^0 L^3 j(t). \quad (1.87)$$

En utilisant ces identités, on trouve finalement que \widehat{b} est solution de l'équation différentielle

$$i\hbar \frac{d\widehat{b}}{dt} = -\hbar\omega\widehat{b} + A^0 L^3 j(t), \quad (1.88)$$

avec la condition initiale $\widehat{b}(0) = \widehat{a}$. Cette équation différentielle peut se récrire comme

$$-i \frac{d\widehat{b}}{dt} = \omega\widehat{b} - \frac{A^0 L^3}{\hbar} j(t), \quad (1.89)$$

où l'on reconnaît l'équation (1.69) donnant l'évolution classique de la variable normale α . Elle s'intègre donc sans difficulté et nous donne

$$\widehat{b}(t) = \widehat{a}e^{-i\omega t} + \alpha_{\text{cl}}(t), \quad (1.90)$$

où α_{cl} désigne la solution du problème classique (Eq. 1.69). À l'aide de ce résultat, montrons que si l'on prépare le système dans l'état vide $|0\rangle$, alors il restera dans un état cohérent $|\alpha_{\text{cl}}(t)\rangle$ où $\alpha_{\text{cl}}(t)$ suit l'évolution classique de la variable normale. On rappelle que par définition de l'opérateur d'évolution, l'état du système à l'instant t est $|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)|\psi(0)\rangle$. Pour montrer que $|\psi(t)\rangle$ est un état cohérent, il faut vérifier qu'il reste état propre de \widehat{a} et l'on calcule donc

$$\widehat{a}|\psi(t)\rangle = \widehat{a}\widehat{U}(t)|\alpha_0\rangle = \widehat{U}\widehat{b}(t)|0\rangle, \quad (1.91)$$

où l'on a utilisé l'unitarité de \widehat{U} permettant d'écrire $\widehat{U}^\dagger\widehat{U} = 1$. En utilisant l'expression de $\widehat{b}(t)$ on en déduit que

$$\widehat{a}|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(\widehat{a}e^{-i\omega t} + \alpha_{\text{cl}}(t))|0\rangle = \alpha_{\text{cl}}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.92)$$

où l'on a utilisé la condition $\widehat{a}|0\rangle = 0$. On en déduit donc que, comme annoncé, $|\psi(t)\rangle$ est un état cohérent associé à $\alpha(t) = \alpha_{\text{cl}}(t)$ identique à l'évolution de la variable normale de l'oscillateur classique.

1.5.3 Propriétés des états cohérents

Décomposition sur les états de Fock

Par définition les états cohérents sont solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.93)$$

Décomposons $|\alpha\rangle$ sur la base des états de Fock $|n\rangle$ en écrivant

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (1.94)$$

avec $\sum |c_n|^2 = 1$. En utilisant l'action de l'opérateur d'annihilation sur un état $|n\rangle$, on a

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty} c_{n'+1} \sqrt{n'+1} |n'\rangle, \quad (1.95)$$

où pour établir la deuxième égalité on a posé $n' = n - 1$ et où l'on a noté que le terme $n = 0$ ne contribuait pas à la somme en raison du facteur \sqrt{n} s'annulant pour $n = 0$. En projetant l'équation aux valeurs propres sur l'état $|n\rangle$, on en déduit donc la relation $c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n$, soit après une récurrence immédiate

$$c_n = c_0 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (1.96)$$

La valeur de c_0 s'obtient en normalisant α . On a en effet $|c_n|^2 = |c_0|^2 |\alpha|^{2n}/n!$, et donc

$$\sum_n |c_n|^2 = |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}. \quad (1.97)$$

En choisissant la phase de c_0 de façon à ce qu'il soit réel on en déduit que $c_0 = \exp(-|\alpha|^2/2)$ et donc

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.98)$$

1.5.4 Fluctuations des phases des états cohérents

Dans l'espace des phases, les états cohérents correspondent à des "taches" centrées sur $\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha$. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, l'amplitude des fluctuations quantiques du champ peut être caractérisés par des fluctuations de la phase et du nombre de photons.

Pour effectuer ce calcul, on commence par noter que la valeur moyenne sur un état cohérent d'un produit de \hat{a} et \hat{a}^\dagger rangés dans l'ordre dit *normal* - opérateurs annihilation à droite des opérateurs création - s'écrit simplement

$$\langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^p | \alpha \rangle = \alpha^{*m} \alpha^p. \quad (1.99)$$

On utilise cette propriété pour calculer les fluctuations de nombre de photons et de phase, et l'on obtient alors

$$\Delta N^2 = |\alpha|^2 \quad (1.100)$$

$$\Delta \varphi^2 = |\alpha|^{-2}, \quad (1.101)$$

autrement dit, $\Delta N \Delta \varphi$ sature la relation d'incertitude phase/nombre d'atomes, ce qui peut d'ailleurs en constituer une définition.

Relation de fermeture

Les états cohérents ne forment pas une famille orthonormée. En effet, si l'on calcule le produit scalaire $\langle \alpha | \alpha' \rangle$, on a en utilisant le développement de l'état cohérent sur la base des $|n\rangle$

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)/2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*n} \alpha'^m}{\sqrt{n!m!}} \langle m | n \rangle. \quad (1.102)$$

En utilisant la relation d'orthonormalité $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$, il vient

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)/2} \sum_n \frac{(\alpha^* \alpha')^n}{n!} = e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 - 2\alpha^* \alpha')/2}. \quad (1.103)$$

Si l'on prend le module, en notant que $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re}(z))$, il vient pour finir

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle| = e^{-|\alpha - \alpha'|^2/2}. \quad (1.104)$$

Bien que n'étant pas orthonormés, les états cohérents forment une famille génératrice de l'espace de Hilbert et l'on a la relation de fermeture

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1, \quad (1.105)$$

où l'on intègre dans le plan complexe des variables α , avec $d^2\alpha = d\operatorname{Re}(\alpha)d\operatorname{Im}(\alpha)$. En effet, en utilisant de nouveau la décomposition des états cohérents sur la base des états de Fock, on trouve que

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{nm} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m}. \quad (1.106)$$

Posons $\alpha = \rho e^{i\theta}$ et intégrons alors la variable α en coordonnées polaires. On obtient dans ce cas

$$\int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m} = \int \rho d\rho e^{-\rho^2} \rho^{n+m} \int d\theta e^{i(n-m)\theta}. \quad (1.107)$$

L'intégrale sur θ se réalise immédiatement, et donne zéro, sauf lorsque $n = m$, auquel cas elle vaut 2π . On en déduit alors que

$$\int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m} = 2\pi \int \rho^{2n+1} d\rho e^{-\rho^2} \quad (1.108)$$

En posant ensuite $\rho^2 = u$ et en notant que $\int u^n e^{-u} du = n!$, on en déduit que

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi, \quad (1.109)$$

en utilisant la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$.

1.5.5 Évolution libre des états cohérents

Intéressons nous ensuite à l'évolution d'un système préparé à $t = 0$ dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$. Sachant que les états propres de \hat{H}_0 sont déphasés de $\omega_0 t(n + 1/2)$, la linéarité de l'équation de Schrödinger nous permet d'écrire que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_0 t(n+1/2)} |n\rangle \quad (1.110)$$

$$= e^{-i\omega_0 t/2} e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha_0 e^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.111)$$

$$= e^{-i\omega_0 t/2} |\alpha_0 e^{-i\omega_0 t}\rangle. \quad (1.112)$$

Autrement dit, durant son évolution le système reste dans un état cohérent dont la variable normale $\alpha(t)$ suit l'évolution classique.

1.6 Source de photons uniques : réalisation et caractérisation

Nous avons vu que le couplage du champ électromagnétique quantique à une source classique aboutissait à un état cohérent du champ. Dans ce paragraphe, nous allons explorer la possibilité de générer des états non classiques du champ et notamment les états de Fock à nombre de photons fixés.

Pour commencer, notons qu'un atome unique ne peut émettre qu'un seul photon à la fois. Les fluctuations de nombre de photons dans une source classique comportant un grand nombre d'atomes proviennent donc du fait que les photons sont émis à des instants différents par des atomes différents. Pour réaliser une source de photon unique, il est donc nécessaire d'isoler une source (atome, molécule etc.) unique.

- *Molécules fluorescentes.* L'utilisation de molécules fluorescente est la première option pouvant venir à l'esprit, par exemple une molécule de rhodamine isolée. Si celle-ci est pompée dans un état excité, elle retombe dans l'état fondamental en émettant un photon unique. L'inconvénient des molécules fluorescentes est le phénomène de "photoblanchiment" qui correspond à la disparition des propriétés de fluorescence après une irradiation trop longue. C'est pourquoi des recherches intensives sont menées pour développer des composés fluorescents à longue durée de vie, tels que les centres colorés ou les boîtes quantiques.

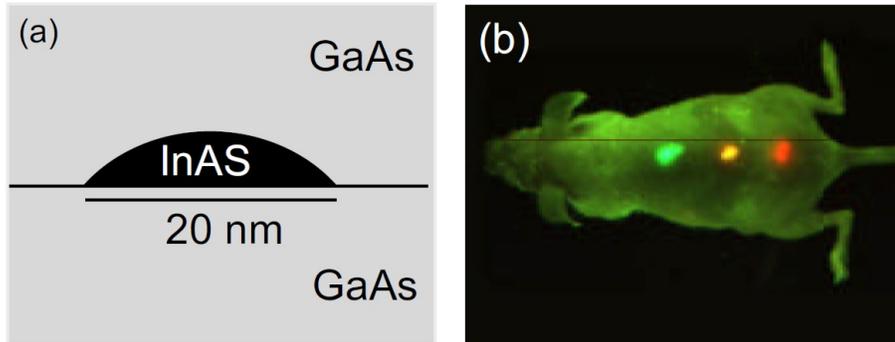


FIGURE 1.7 – a) a) Principe de réalisation d’une boîte quantique semi-conductrice. b) Observation des organes d’une souris vivante par fluorescence de boîtes quantiques semi-conductrices.

- *Centres colorés.* Une voie possible est l’utilisation de centres colorés (i.e. de défauts) dans les cristaux, en particulier les centres N-V du diamant, correspondant à l’association d’un atome d’azote avec une lacune de la matrice de carbone. Chaque centre N-V se comporte comme une molécule fluorescente et peut donc être utilisé comme source de photons uniques.
- *Boîtes quantiques.* Une seconde alternative est l’utilisation de boîtes quantiques, des agrégats d’InAs inclus dans une matrice de GaAs. Ces agrégats sont obtenus en déposant InAs sur un substrat de GaAs. Du fait de la différence de maille entre les deux structures cristallines, il existe une énergie de surface associée à l’interface InAs/GaAs. Pour minimiser cette interface, InAs forme des “gouttes” à la surface du substrat de GaAs. Ces gouttes, de quelques dizaines de nanomètres de diamètre et quelques nanomètres d’épaisseur, sont ensuite recouvertes par un dépôt de GaAs. Bien que stables uniquement à basse température, les techniques aujourd’hui parfaitement maîtrisées de croissance cristalline des semi-conducteurs permettent de les inclure dans des édifices microscopiques plus vastes telles que des micro-cavités qui permettent d’améliorer la directionnalité de la source.

1.6.1 Application à la cryptographie quantique

Le commerce sur internet ou la téléphonie mobile ont étendu du domaine militaire au domaine civil la nécessité de communications cryptées. Le protocole de cryptographie le plus sûr est le cryptage par clef secrète. Il consiste à écrire le message à transmettre en une série m_i de 0 et de 1 et de le coder en la sommant modulo 2 à une suite aléatoire de c_i 0 et de 1 (la clef) de même longueur que le message initial. La suite $m'_i = m_i + c_i$ est transmise d’un correspondant à l’autre sur un canal public puis décodée en effectuant l’opération $m'_i + c_i = m_i$.

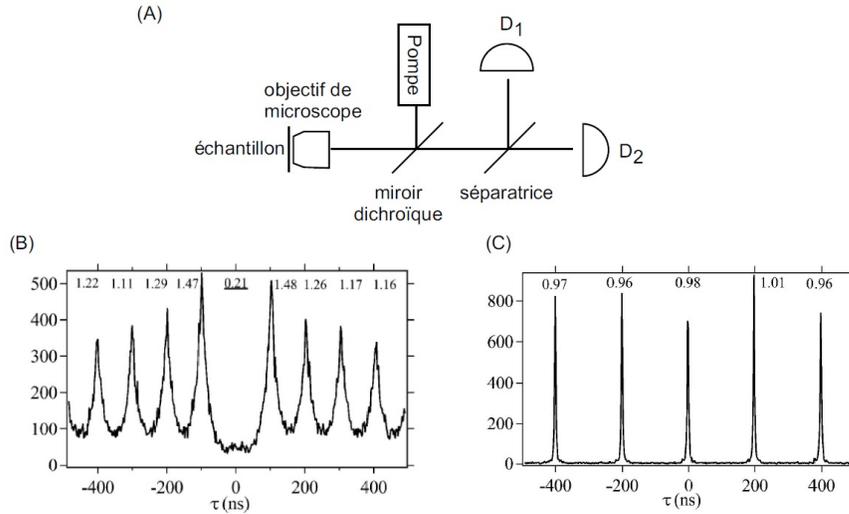


FIGURE 1.8 – Caractérisation d’une source à un photon par corrélation d’intensité (extrait de Beveratos A. *et al.*, Eur. Phys. J. D, **18** 191 (2002)). A) Principe de l’expérience. La source à un photon, ici un centre N-V, est placée sur le porte échantillon d’un objectif de microscope. Le pompage est assuré par un laser pulsé émettant des impulsions de 0.8 ns avec un taux de répétition de 5.3 MHz. Le miroir dichroïque réfléchit la longueur d’onde du laser de pompe (532 nm) et transmet la longueur d’onde d’émission du centre coloré (690 nm). Le nombre de photons émis par la source est mesuré par corrélation temporelle. On mesure le nombre d’événements où un photon est détecté par D_1 à l’instant t et un photon est détecté par D_2 à $t + \tau$. Si la source n’émet qu’un photon à la fois, ce nombre d’événements doit être nul pour $\tau = 0$. B) et C) Résultat de la mesure pour une source à photon unique (B) et une source classique (C). Les pics latéraux correspondent à des photons arrivés dans deux impulsions successives.

Ce protocole bien qu'en principe parfaitement sûr possède deux faiblesses. D'une part il est nécessaire que les deux partenaires (Alice et Bob conventionnellement) connaissent la clef de cryptage c_i . Il se pose donc un problème de distribution de cette clef sur un canal secret. Deuxièmement, une clef ne peut servir qu'une seule fois. On peut en effet montrer que l'on peut reconstruire la clef de cryptage à partir de deux messages codés avec une même clef.

Ces deux difficultés rendent la cryptographie par clef aléatoire inopérante en pratique et on lui préfère plutôt les algorithmes dits à clef publique actuellement en usage de nos jours sur internet. La sécurité de ces protocoles n'est cependant pas absolue : la difficulté du décryptage d'un message codé se fonde sur la difficulté à décomposer un grand nombre en facteurs premiers et est donc tributaire de la puissance de calcul des ordinateurs : on peut notamment montrer que le développement d'un éventuel ordinateur quantique rendrait caduque tous ces algorithmes.

La cryptographie quantique est née en vue de résoudre le problème de la communication d'une clef secrète entre Alice et Bob en se fondant sur un des fondements de la mécanique quantique, qui est que la mesure perturbe irrémédiablement l'état d'un système. Dans le protocole le plus simple de cryptographie quantique, les 0 et 1 de la clef secrète sont représentés par les états de polarisation d'un photon : un photon polarisé selon x correspond à 0 et selon y elle correspond à 1.

Imaginons donc qu'Alice génère une succession de photons, dont les polarisations sont choisies aléatoirement dans deux bases de polarisations \mathcal{B} et \mathcal{B}' inclinée à 45° l'une de l'autre. Chaque photon émis est donc caractérisé par deux grandeurs aléatoires, respectivement la base choisie et la polarisation choisie dans cette base, ces deux informations étant conservées par Alice.

Bob, lorsqu'il reçoit les photons émis par Alice, ne connaît pas la base choisie pour coder les photons et va donc mesurer la polarisation de chacun d'eux aléatoirement dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Pour un photon donné, si Alice et Bob ont fait un même choix de base, l'état de polarisation mesuré par Bob est identique à celui choisi par Alice. En revanche, si la base est mal choisie, Bob a une chance sur deux d'obtenir un résultat différent d'Alice. Une fois les photons tous lus par Bob, Alice communique sur un canal public le choix de base pour chaque photon envoyé : Alice et Bob peuvent donc construire une clef commune en ne conservant que les polarisations de photons mesurées dans une même base.

Pour vérifier la sécurité de ce protocole, imaginons qu'Eve cherche à intercepter la communication entre Alice et Bob. Eve ne connaît pas non plus le choix de polarisation d'Alice et doit donc choisir à chaque photon émis une base de lecture parmi \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Statistiquement, elle choisit la même base qu'Alice une fois sur deux. Dans ce cas, elle mesure le bon état de polarisation du photon et celui-ci est ensuite réémis dans le même état de polarisation à Bob. En revanche, lorsque Eve choisit la mauvaise base (\mathcal{B}' pour fixer les idées), va se retrouver aléatoirement polarisé selon x' ou y' lorsqu'il sera émis vers Bob et la mesure de Bob va s'en trouver affecté. En effet, si Bob fait la mesure de l'état de polarisation du photon dans la même base qu'Alice, il ne trouvera pas le même résultat que celle-ci avec une probabilité de 100 %.

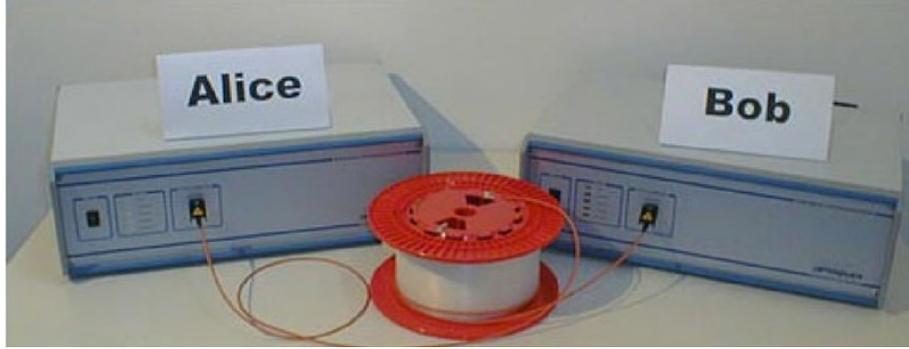


FIGURE 1.9 – Système commercial de cryptographie quantique développé par la firme genevoise ID-Quantique (<http://www.idquantique.com/>).

Pour détecter la présence d’Eve, Alice et Bob vont donc sacrifier une partie de la clef qu’ils s’étaient transmis en communiquant publiquement une partie de celle-ci. Comme nous venons de le voir, les polarisations mesurées par Alice et Bob doivent être identiques en l’absence de tout espion, puisque les états des photons conservés par les deux interlocuteurs ont été mesurés dans des bases identiques. Un rapide calcul de probabilité montre que lorsque N photons sont sacrifiés, la probabilité qu’a Eve de passer inaperçu vaut $(3/4)^N$ et tend donc vers 0 rapidement.

Pour être efficace, le protocole de cryptographie quantique nécessite l’utilisation de sources à photons uniques. En effet, si les impulsions envoyées par Alice contenaient plusieurs photons, Eve pourrait en prélever un seul et faire la mesure sur celui-ci, sans perturber le reste des photons : ceci justifie donc la nécessité de recourir à des sources de photons non classiques telles que les centres colorés ou les boîtes quantiques que nous venons de décrire.

1.7 Appendice : Conditions aux limites périodiques

1.7.1 Séries de Fourier

On considère l’ensemble \mathcal{E} des fonctions f possédant des conditions aux limites périodiques sur une boîte cubique de côtés de longueur L parallèles aux axes $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$. Cet espace peut se mettre sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$, où \mathcal{E}_α désigne l’espace des fonctions de la variable $x_{\alpha=1,2,3}$, périodiques et de période L .

En utilisant le théorème de Fourier, un élément f_α de \mathcal{E}_α se décompose en série de Fourier de la forme

$$f_\alpha(x_\alpha) = \sum_{n_\alpha} c_{n_\alpha} e^{2i\pi n_\alpha x_\alpha / L}. \quad (1.113)$$

Cette relation traduit le fait que la famille des exponentielles imaginaires forme une base (hilbertienne) de l'espace \mathcal{E}_α . Une base de l'espace produit tensoriel est constitué des produits tensoriels des vecteurs de base de chacun des \mathcal{E}_α . On peut par conséquent décomposer une fonction quelconque sous la forme

$$f(x, y, z) = \sum_{n_x, n_y, n_z} c_{n_x, n_y, n_z} e^{2i\pi(n_x x + n_y y + n_z z)/L}. \quad (1.114)$$

Dit autrement, la famille des ondes planes $\exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ où les coordonnées de \mathbf{k} sont quantifiés en unité de $2\pi/L$ forme une base de l'espace des fonctions périodiques.

Calcul d'intégrale

On cherche ici à calculer

$$\int_{L^3} d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \prod_j \left(\int_0^L dx_j e^{i2\pi n_j x_j / L} \right), \quad (1.115)$$

On doit alors étudier deux cas. Si $n_j \neq 0$, on a

$$\int_0^L dx_j e^{i2\pi n_j x_j / L} = \left[\frac{L}{2i\pi n_j} e^{2i\pi n_j x_j / L} \right]_0^L = 0. \quad (1.116)$$

Pour $n_j = 0$, l'intégrand vaut 1, et l'intégrale vaut alors simplement L . On en déduit donc que

$$\int_{L^3} d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = L^3 \prod_j \delta_{n_j, 0}. \quad (1.117)$$

De même, on montre que

$$\int_{L^3} d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = L^3 \prod_j \delta_{n_j, n'_j}. \quad (1.118)$$

1.7.2 Théorème d'Ehrenfest

On considère l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \hat{H} \langle \hat{A} \rangle, \quad (1.119)$$

Soit \hat{A} un opérateur, en mécanique quantique on définit la valeur moyenne de \hat{A} par $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$. On a alors

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi \rangle = \left(i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi | \right) \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \left(i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle \right), \quad (1.120)$$

soit en utilisant l'équation de 'Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = -\langle \psi | \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \hat{H} | \psi \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle, \quad (1.121)$$

où l'on reconnaît le théorème d'Ehrenfest pour l'évolution des observables.

Bibliographie

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115(3) :485–491, Aug 1959.
- [2] R. A. Beth. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Phys. Rev.*, 50(2) :115–125, Jul 1936.
- [3] H. A. Bethe. The electromagnetic shift of energy levels. *Phys. Rev.*, 72(4) :339–341, Aug 1947.
- [4] R. G. Chambers. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, 5(1) :3–5, Jul 1960.
- [5] Arthur H. Compton. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Phys. Rev.*, 21(5) :483–502, May 1923.
- [6] L. Davis, A. S. Goldhaber, and M. M. Nieto. Limit on the photon mass deduced from pioneer-10 observations of jupiter’s magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 35(21) :1402–1405, Nov 1975.
- [7] T. L. Dimitrova and A. Weis. The wave-particle duality of light : A demonstration experiment. *Am. J. of Phys.*, 76 :137, 2008.
- [8] P. Duplantier. L’énergie du vide.
- [9] M. E. J. Friese, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Optical torque controlled by elliptical polarization. *Optics letters*, 23(1) :1–3, 1998.
- [10] W. E. Lamb and R. C. Retherford. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.*, 72(3) :241–243, 1947.
- [11] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz. Observation of $\frac{h}{e}$ aharonov-bohm oscillations in normal-metal rings. *Phys. Rev. Lett.*, 54(25) :2696–2699, Jun 1985.
- [12] T. A. Welton. Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, 74(9) :1157–1167, Nov 1948.