# INTRODUCTION à L'ASTROPHYSIQUE

Cours d'option de Licence Magistère Interuniversitaire de Physique.

2004–2005

Steven Balbus

8ème Cours 19 jan 2005.

Références Recommandées:

- La meilleure référence est un site internet:

  http://background.uchicago.edu/ whu/, La "homepage" du Prof. Wayne Hu. Il y a des discussions et des explications très claires à tous les niveaux: novice, expert, et le juste milieu!

- Binney, J., and Tremaine, S. 1987, Galactic Dynamics, Princeton University Press. (Voir Appendice 9 pour une discussion très claire de l'essentiel de la cosmologie. Niveau moyen.)

- Hawley, J., and Holcombe, K. 1998, Foundations of Modern Cosmology, Oxford University Press. (Un texte clair et non technique.)

- Peebles, P.J.E. 1993, Principles of Physical Cosmology, Princeton University Press. (Un livre approfondi, difficile à lire. Niveau avancé.)

- Weinberg, S., Gravitation and Cosmology 1972, Wiley-Interscience. (Un vieux classique. Très mathématique, niveau avancé.)

# IL FAIT SOMBRE LA NUIT.

C'est l'observation cosmologique la plus ancienne. La question est pourquoi?

Si l'univers avait une dimension et un âge infinis, et si les galaxies étaient distribuées uniformément, la luminosité serait infinie!

Soit $l$ la luminosité par unité de volume. On observe le flux $f$. Le flux $df$ des sources au rayon $r$ est

$$df = \left(\frac{l}{4\pi r^2}\right) \times 4\pi r^2 dr = l\,dr$$

On peut voir le problème immédiatement: le flux ne dépend pas de la distance $r$, et $\int l dr = \infty$!

Alors, pourquoi les nuits sont-elles noires?

## ENCORE UNE QUESTION:

Dans un univers Euclidien stationnaire quel est le potentiel gravitationnel?

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \rightarrow \frac{d^2(r\Phi)}{dr^2} = 4\pi G\rho r$$

qui donne:

$$\Phi = \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 + C_1 + \frac{C_2}{r}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont les constantes d'intégration. Il est nécessaire que $C_2 = 0$ ($\Phi$ n'est pas singulier). $C_1$, une constante additive, n'est pas importante.

Mais évidemment, le résultat $\Phi = (2/3)\pi G\rho r^2$ n'est pas correct: tout dépend du choix de l'origine.

La solution à nos problèmes commence en 1929, lorsqu'Edwin Hubble découvre que les galaxies lointaines nous fuient avec une vitesse proportionnelle à leur distance. L'interprétation la plus simple est que l'univers se dilate. L'univers n'est pas stationnaire!

La loi de Hubble est simplement

$$v = H_0 r$$

où $v$ est la vitesse d'une galaxie lointaine, $H_0$ la constante de Hubble, et $r$ la distance à la galaxie. On parle du "flot de Hubble."

Commençons avec le modèle le plus simple: un univers qui est partout isotrope et homogène. À l'époque actuelle ($t = t_0$), considérons deux galaxies quelconques qui se déplacent exactement avec le flot de Hubble. L'écart entre les deux en fonction du temps est donné par

$$dr = R(t)\, dl \to (t \text{ fixé}) \int_l \to r(t) = R(t) l$$

où $l$ est une coordonnée qui est fixée au flot de Hubble. Pour l'écart entre les galaxies, $l$ ne dépend pas de $t$.

$R(t)$ est une quantité importante: le facteur d'échelle. $R(t_0) = 1$, et il s'agrandit avec le temps, mais ne dépend pas de la position.

La loi Hubble découle immédiatement:

$$v \equiv \dot{r} = \dot{R}l = \frac{\dot{R}}{R}r,$$

mais la "constante" de Hubble en fait dépend de $t$,

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} \rightarrow H_0 = \dot{R}(t_0),$$

puisque $R(t_0) = 1$.

Notons que notre position $r = 0$ n'est pas spéciale. Une galaxie que nous voyons en $\boldsymbol{r}$ est vue en $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}$, par un observateur à la position $\boldsymbol{s}$. Alors, $\dot{\boldsymbol{r}} = H(t)\boldsymbol{r}$, et $\dot{\boldsymbol{s}} = H(t)\boldsymbol{s}$, et $\longrightarrow$

$$\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{s}} = H(t)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})$$

Cela indique que l'univers obéit à la même loi vu de la position $\boldsymbol{s}$. L'univers paraît exactement le même à tous les observateurs: il se dilate uniformément.

## LA DYNAMIQUE

Il y a un résultat de relativité générale dont nous avons besoin: en symétrie sphérique, la matière à l'extérieur d'une sphère de rayon $r$ ne contribue pas à la force gravitationnelle à l'intérieur de $r$. (Valable en mécanique newtonienne et en RG: Théorème de Birkhoff.)

Commençons avec un univers homogène et isotrope en expansion. Choisissons une origine $O$ quelconque. Considérons une sphère de rayon $r$ centrée en $O$. Un point à la surface de la sphère obéit à la loi:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

(On suppose que le rayonnment n'importe pas pour la dynamique.)

$$r = Rl,\ M/r^2 = (4\pi/3)\rho Rl,\ \ddot{r} = l\ddot{R},$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho}{3}R$$

$l$ n'apparaît pas. Seul le facteur $R$ apparaît. En cosmologie "classique", où l'énergie est dominée par la matière ordinaire,

$\rho R^3 = \rho(t_0) \equiv \rho_0$, une constante: densité actuelle.

En cosmologie moderne, nous savons maintenant qu'il y a une composante de $\rho$ constante, la densité d'énergie du "vide" $\rho_V c^2$. Mais commençons d'abord avec la cosmologie classique:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi R}{3}(\rho R^3)R^{-2}$$

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{4\pi G}{3}(\rho R^3)R^{-1} + \underbrace{E}_{\text{cnste}}$$

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 = 2E$$

une équation qui est en fait valable très généralement. Bien que notre calcul soit newtonien, finalement cette équation est également vraie en relativité. La méthode n'est pas générale, mais le résultat l'est!

Solutions avec $R \to \infty$ à $t \to \infty$:

$$\dot{R}^2 = 2E \text{ doit avoir } E > 0!$$

Si $E = 0$,

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \text{ (critique)}$$

Si $E < 0$, pas de solution avec $R \to \infty$ à $t \to \infty$. À la place, $\dot{R} = 0$ lorsque $R = 4\pi G\rho_0/3|E|$, et puis, l'univers recommence à se contracter!

Les 3 cas $(E > 0, E = 0, E < 0)$ donnent 3 géométries différentes pour l'espace à courbure positive, plat, et à courbure négative. Notre univers semble être plat $(E = 0)$, et nous allons donc nous concentrer sur ce cas spécial dans ce cours.

$$1 - \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho}{H^2} = 0$$

À $t = t_0$ (âge actuel), $\Omega \equiv \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho}{H^2} = 1$, et reste égale à 1 tout le temps. Pendant des années, les observateurs ont trouvé $\Omega < 1$, même lorsque la matière noire, qui est nécessaire pour expliquer que les galaxies restent liées, était prise en compte dans les calculs. Au cours de ces dernières années, des arguments très forts ont été trouvés en faveur de l'existence d' "énergie sombre", en plus de la matière noire! L'univers se comporte comme si le vide lui-même avait une densité d'énergie constante (qui ne change pas avec le temps). Avec l'énergie sombre, la densité totale $= 3H_0^2/8\pi G$, et $\Omega = 1$.

Univers critique avec $\rho_V = 0$.

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 R^{-1}$$

$$R^{1/2}\dot{R} = \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right)^{1/2} = H_0$$

$$\frac{2}{3}R^{3/2} = H_0 t$$

$$R(t) = \left(\frac{3H_0 t}{2}\right)^{2/3}, \text{puisque } R(0) = 0.$$

L'âge de l'univers est $2/(3H_0)$ dans ce modèle (pourquoi?).

## DÉCALAGE VERS LE ROUGE: "REDSHIFT"

Les photons voyagent à la vitesse de la lumière, et ne se déplacent certainement pas avec le flot de Hubble! Un photon rattrape toujours les observateurs qui s'éloignent de lui. Pendant un temps $dt$, le photon se déplace de $c\,dt$. La galaxie qui s'éloigne voit un décalage de fréquence $d\nu$,

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{\delta v}{c} = -\frac{H\,c\,dt}{c},$$

ou

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -\frac{\dot{R}}{R}$$

Cela veut dire $\nu \propto 1/R$, $\lambda \propto R$. Si $\lambda_0$ est la longueur d'onde observée en $t = t_0$, émise par une source à l'instant $t$ ($\lambda = \lambda_e$), alors

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{1}{R}.$$

Le redshift $z$ est défini par

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{1}{R}$$

Cette relation est toujours vraie pour *toutes* les cosmologies. $z$ peut être directement mesuré. Les astronomes préfèrent utiliser $z$ plutôt que $R$ pour décrire l'évolution de l'univers.

Un photon qui voyage à travers l'univers change sa coordonnée $l$ à un taux

$$\frac{dr}{dt} = R(t)\frac{dl}{dt} = -c$$

Il nous atteint ($l = 0$ ) à $t = t_0$:

$$\int_0^l dl' = -c\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{R(t')} = c\int_t^{t_0} \frac{dt'}{R(t')}$$

Mais, en fait, il n'est pas nécessaire de connaître $R(t)$ explicitement:

$$\int \frac{dt'}{R(t')} = \int \frac{dR}{\dot{R}R},$$

et $(\dot{R}R)^2 = 2E + 8\pi G\rho R^4/3$. Pour les univers critiques (comme le nôtre), $E = 0$, et on trouve

$$\int \frac{dt'}{R(t')} = \left(\frac{3}{8\pi G}\right)^{1/2} \int \frac{dR}{R^2 \rho^{1/2}}$$

Si $\rho_T$ est la densité d'énergie totale (sur $c^2$),

$$\int \frac{dt'}{R(t')} = \frac{1}{H_0} \int \frac{dR}{R^2} \left(\frac{\rho_T}{\rho}\right)^{1/2} = \frac{1}{H_0} \int \left(\frac{\rho_T}{\rho}\right)^{1/2} dz,$$

puisque $1/R$=1+z.

Pour le cas $\rho_T/\rho = \rho_0/\rho = R^3$ (univers critique classique), cela donne:

$$l = \frac{c}{H_0}\int_R^1 \frac{dR'}{\sqrt{R'}} = \frac{2c}{H_0}\left(1 - R^{1/2}\right) = \frac{2c}{H_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$$

Finalement nous pouvons répondre à la question qui a ouvert ce cours: pourquoi la nuit est-elle sombre?

La nuit est sombre parce que (1) les photons qui nous atteignent en provenance des galaxies le plus lointaines ont été fortement décalés vers le rouge et ont donc perdu de l'énergie; (2) l'univers a un âge fini, et les photons qui nous atteignent juste aujourd'hui ont voyagé sur une distance inférieure à $2c/H_0$ (pour ce modèle). Le flux total d'énergie des photons qui nous atteignent la nuit est fini.

Dimension angulaire des galaxies:

Supposons que toutes les galaxies ont le même diamètre angulaire $D$. La taille angulaire observée d'une galaxie avec un décalage vers le rouge $z$ serait alors

$$\delta = \frac{D}{l(z)\, R(z)} = \frac{H_0}{2c} \frac{(1+z)^{3/2}}{(\sqrt{1+z} - 1)}$$

Pour $z \ll 1$:

$$\delta = \frac{H_0 D}{cz} = \frac{H_0 D}{v} = \frac{H_0 D}{H_0 r} = \frac{D}{r}$$

qui est le résultat pour un simple modèle euclidien.

Pour $z \gg 1$:

$$\delta = \frac{H_0 D}{2c} z^{1/2},$$

c'est-à-dire la galaxie paraît énorme!

Cela est dû au fait qu'au début l'univers était plus petit et les galaxies étaient très proches les unes des autres. Mais elles se sont éloignées si rapidement les unes des autres avec l'expansion de l'espace que les photons peuvent seulement aujourd'hui nous atteindre. Une analogie est une fourmi se deplaçant du pôle nord vers l'équateur sur une sphère en expansion. Elle ne fait aucun progrès jusqu'à ce que le taux d'expansion soit suffisamment lent.

Rayonnement dans l'univers.

En 1965, l'argument le plus convaincant en faveur de la théorie du "Big Bang" fut découvert: il y a dans l'univers un fond de rayonnement qui a le spectre d'un corps noir à la température de 2.7 K. (Le spectre précis ne fut déterminé que bien plus tard!) Les chercheurs Arno Penzias et Robert Wilson ont obtenu le prix Nobel pour cette dćouverte.

L'énergie moyenne d'un photon $\langle h\nu \rangle$ est proportionnelle à $kT$. Cela signifie que la température $T$ du rayonnement dépend du décalage vers le rouge de la même manière qu'une fréquence, $\propto 1/R$:

$$T = \frac{T_0(\text{actuel})}{R} = T_0(1+z)$$

Aux d.v.r. importants, l'univers devient très chaud. En fait, aux décalages suffisamment importants, l'univers devient si chaud que la densité d'énergie du rayonnement $\rho_{rad}c^2 = aT^4$ excède la densité d'énergie de la matière $\rho_m c^2$. Notre équation pour $R$ est:

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{rad}R^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{rad}R^4)R^{-2}$$

Cela implique $R \propto t^{1/2}$. Mais alors ...

$$\frac{aT^4}{c^2} = \rho_{rad} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G t^2}.$$

Nous avons une équation explicite pour la température de l'univers à ses débuts!

Presque tout l'hélium de l'univers (25% en masse) a été produit dans les premiers temps de la vie de l'univers, beaucoup plus que la quantité d'hélium produite dans les étoiles. La température en deçà de laquelle un noyau d'He peut survivre est $10^9$ K $\rightarrow$ 200 s. Nous savons aussi que tout l'H n'a pas été transformé en He, donc les taux des réactions nucléaires à cette époque n'étaient ni rapides ni lents comparés au taux d'expansion.

- Sachant cela, on peut estimer la densité du nombre de protons à l'époque de la synthèse de l' He. On trouve que $n \sim 10^{18}$ cm$^{-3}$.

- $n = n_0(1+z)^3$, $n_0 =$ densité moyenne actuelle d'H. Donc $1+z$ à l'époque de la synthèse de l'He peut être calculé: $1+z \simeq 10^8$.

- $T_0 = T(\text{syn.})/(1+z) \simeq 10^9/10^8 = 10\text{K}!$

Cet argument avait été avancé par Gamow bien avant 1965 pour prédire qu'il devait y avoir un fond du rayonnement à des longeurs d'onde millimétriques. Gamow avait été ignoré à l'époque (dans les années 1950), en partie parce que les technologies n'étaient pas facilement accessibles, mais surtout parce que les physiciens ne prenaient pas la cosmologie au sérieux! Tout cela changea après 1965.

Au cours de ces dernières années, les observateurs ont utilisé un type de supernova comme une luminosité standard pour estimer les distances. Ils ont trouvé quelque chose d'incroyable: le taux d'expansion de l'univers augmente avec le temps! (En regardant vers le passé, l'univers s'effondre plus lentement qu'attendu.)

Les modèles en accéleration étaient connus comme une possibilité mathématique depuis les années 1920, mais avaient été largement ignorés jusqu'à récemment. La théorie moderne suggère que ce que nous appellerions le vide a une densité d'énergie finie qui reste fixe alors que l'univers se dilate.

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_V R^2 \rightarrow R \propto \exp(\alpha t),$$

où $\alpha = \sqrt{8\pi G \rho_V / 3}$.

Plus généralement,

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_V R^2 + \rho_0 R^{-1}\right)$$

Cela peut être résolu exactement. On trouve

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{1/3}\left[\sinh\frac{3}{2}H_0 t\sqrt{1-\Omega_m}\right]^{2/3}$$

où $\Omega_m = 8\pi G\rho_0/H_0^2$ (à démontrer!). Au debut $R \propto t^{2/3}$ comme ci-dessus, mais plus tard $R \propto \exp(\alpha t)$, la dépendance en temps est encore une fois exponentielle.

Une combinaison de simulations numériques, d'observations de supernova et d'une analyse extrêment détaillée des minuscules fluctuations du fond de rayonnement ont produit le premier modèle standard de l'univers.

$H_0 = 71$ km s$^{-1}$ Mpc$^{-1}$

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} = 0.27$$

$$\Omega_V = \frac{8\pi G\rho_V}{3H_0^2} = 0.73$$

D'après $R(t_0) = 1$, l'âge de l'univers $t_0 = 13.7 \times 10^9$ a.

Pourquoi aurait-on $\Omega_V + \Omega_m = 1$? Qu'est-ce qui détermine $\rho_V$? Une analyse dimensionnelle $(G, \hbar, c)$ donne $\rho_V \sim 10^{116}$ g cm$^{-3}$, et $\Omega_V = 10^{143}$! On est dans l'erreur par 143.137 ordres de grandeur, et on n'est pas prêt de voir le début d'une solution!

Peut-être l'un d'entre vous qui suit ce cours trouvera la réponse dans les années a venir. On a besoin de l'aide...