INTRODUCTION à L'ASTROPHYSIQUE

Cours d'option de Licence Magistere Interuniversitaire de Physique.

2006–2007

Steven Balbus

3me Cours, 15 nov 2006: La Structure et la Formation des Étoiles.

LA NAISSANCE DES ÉTOILES

Les étoiles se forment grâce à l'auto-gravité (une idée qui vient d'Isaac Newton).

Les étoiles ne s'effondrent pas, à cause de la pression.

Une étoile est un équilibre entre les deux.

Considérons l'effondrement d'un nuage de "poussière" (c'est-a-dire, gaz sans pression) de densité constante ρ. Un grain de poussière obéit à l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

où M est la masse à l'interieur de r. Si le nuage est initialement à un état de repos, pour chaque r_0 (initial), M doit être une constante.

LE TEMPS D'EFFONDREMENT

Alors une intégration donne

$$v^2 = \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}, \quad v \equiv dr/dt < 0.$$

où r_0 est le rayon initial, et le temps d'effondrement est

$$t = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{2GM/r - 2GM/r_0}}$$

On trouve:

$$t = \left(\frac{3\pi}{32G\rho}\right)^{1/2}$$

Notez: c'est indépendant de r_0! $T \sim 2 \times 10^7$ ans pour $\rho = 10^{-24}$ g cm^{-3}, une échelle de temps typique dans le milieu interstellaire.

LA MASSE DE JEANS

Quel est l'effet de la pression? Considérons un gaz isotherme. Le gaz peut communiquer (avec lui-même) sur l'échelle de temps R/c_S, où R est une longueur typique et c_S est la vitesse du son. Quand

$$\frac{R}{c_S} > \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{1/2}$$

un nuage ne peut pas empêcher son effondrement. Un calcul plus précis démontre que la fréquence d'une onde sonore devient

$$\omega^2 = k^2 c_S^2 - \boldsymbol{4\pi G\rho}$$

dans un milieu homogène à cause de autrogravité. Remarquez le signe moins! Si

$$k^2 c_S^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} c_S^2 < 4\pi G\rho,$$

alors la fréquence ω est imaginaire, et "l'onde" se comporte comme une fonction exponentielle, pas une onde périodique.

On définit la longueur Jeans par $\omega = 0$, ou

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi c_S^2}{G\rho}$$

La masse de Jeans est celle qui est contenue dans une sphère de diamètre $\lambda_J/2$:

$$M_J = \frac{4\pi\rho}{3}\left(\frac{\lambda_J}{4}\right)^3 = 0.364\,\frac{c_S^{3/2}}{G^{3/2}\rho^{1/2}}$$

$T = 10$ K, $n_{H_2} = 10^3$ cm^{-3} donne $M_J = 3.1 \times 10^{30}$ kg ou $1.5\,M_\odot$. (Les conditions typiques pour un nuage moléculaire; $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg.)

Notre formule pour M_J suppose qu'il n'y a pas une pression extérieure. (Sinon, le résultat serait différent!)

L'EFFET DE LA ROTATION

Dans un disque de gaz très mince où l'auto-gravité est importante, une onde acoustique satisfait l'équation

$$\omega^2 = k^2 c_S^2 - 2\pi G \Sigma |k| + \kappa^2$$

Σ est la densité de surfacique de masse du disque. Le terme κ^2 s'appele la fréquence epicyclique. Elle est la fréquence à laquelle un élément de masse, en orbite dans le disque, oscille radialement, lorsque la masse d'une orbite circulaire est perturbée. (Cercle $\rightarrow$ ellipse.)

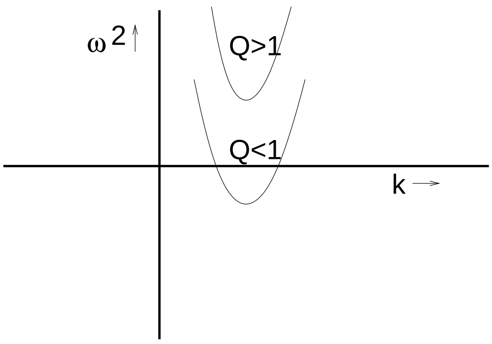
$$\kappa^2 = R^{-3} d(R^4 \Omega^2)/dR$$

où $\Omega(R)$ est la vitesse angulaire du disque. La cause fondamentale du mouvement epicyclique est la force de Coriolis, c'est-à-dire, la conservation du moment cinétique.

Il n'est pas difficile de montrer que lorsque

$$Q \equiv \frac{\kappa c_S}{\pi G \Sigma} < 1,$$

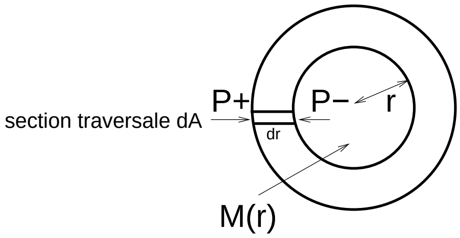
$\omega^2 < 0$ pour un intervalle de k, et le disque est donc instable. C'est "le critère Q de Toomre."



Il est possible qu'il y ait des étoiles ou des planètes qui se forment ainsi.

LA STRUCTURE STELLAIRE:
L' EQUATION D'ÉQUILIBRE HYDROSTATIQUE

A l'intérieur d'une étoile, il y a équilibre entre la force de gravité et la force de pression. Considérons un petit cylindre de section transversale dA:



L'équilibre des forces donne:

$$(P^- - P^+)\,dA = \frac{GM(r)}{r^2}(\rho\ dA\ dr)$$

Puisque $P^- - P^+ = -dr(dP/dr)$, on trouve

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}}$$

Plus généralement,

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi$$

$$\nabla \cdot [(1/\rho)(\nabla P)] = -\Delta \Phi = -4\pi G \rho$$

(Équation de Poisson). Notez que si on connaît $P(\rho)$, la fomulation du problème est complète.

Exemple 1: $\rho =$ cte. Puis, $M(r) = 4\pi G \rho r^3/3$.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G \rho^2}{3} r$$

$$P(r) = P_0 - \frac{2\pi G \rho^2}{3} r^2$$

$P = 0$ quand $r^2 = 3P_0/2\pi G \rho^2$, qui doit être le rayon de l'étoile. La masse est

$$M = \left(\frac{6P_0^3}{\pi G^3 \rho^4} \right)^{1/2}$$

Plus la densité est grande, plus la masse est petite. (Vrai en géneral.)

Exemple 2: $P = K\rho^2$.

$$\frac{d^2}{dr^2}(\rho r) = \frac{2\pi G\rho r}{K}$$

$$\rho r = A\sin(kr) + B\cos(kr), k^2 = 2\pi G/K$$

Il faut que $B = 0$, puisque $\rho r = 0$ en $r = 0$. Donc, $A = \rho_0/k$,

$$\rho = \rho_0 \frac{\sin(kr)}{kr},$$

et le rayon de l'étoile est $\pi/k = \sqrt{K\pi/2G}$. Une question pour le lecteur: en coordonnés cartésiennes, on trouve la solution

$$\rho = \rho_0 \sin(kx)\sin(ky)\sin(kz) \quad 3k^2 = 2\pi G/K$$

Est-ce vrai? Étoiles cubiques? (Petit conseil: réfléchissez à l'effet de la masse négative à l'extérieur de “l'étoile”!)

LE THÉORÈME DU VIRIEL

On multiplie l'équation d'EH par $4\pi r^3$ et on intègre :

$$\int_0^R 4\pi r^3 \times \frac{dP}{dr}\,dr = -\int_0^R 4\pi r^3 \times \frac{GM\rho}{r^2}\,dr$$

À gauche,

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr}\,dr = \Big[4\pi r^3 P\Big]^R{}_0 - 3\int_0^R P\,4\pi r^2\,dr$$

$$= -3\int P\,dV.$$

Rapelons qu'un gaz idéal obéit aux lois $P = nkT$, $\mathcal{E} = (3/2)nkT$, où $\mathcal{E}$ est la densité d'énergie par u.d.v. Donc

$$-3\int P\,dV = -2\int \mathcal{E}\,dV = -2E_{therm},$$

soit $-2\times$ (l'énergie totale thermique).

D'autre part, à droite,

$$-\int_0^R 4\pi r^3 \times \frac{GM\rho}{r^2}\,dr = -\int_0^R \frac{GM(4\pi\rho r^2 dr)}{r} = EP,$$

l'énergie potentielle gravitationnelle, soit $\int GMdM/r$. On a ainsi démontré que dans une étoile qui satisfait à la condition d'équilibre hydrostatique, on a

$$\boxed{E_{Therm} = -\frac{1}{2}EP} > 0$$

C'est le *Théorème du Viriel.* Remarquez en plus,

$$E_{totale} = E_{therm} + EP = +\frac{1}{2}EP < 0$$

L'énergie totale d'une étoile est exactement la moitié de son énergie potentielle. Il est possible de trouver une formule exacte pour EP lorsque $P = K\rho^\gamma$:

$$EP = -3[(\gamma - 1)/(5\gamma - 6)]GM^2/R.$$

$$EP = -\int_0^R \frac{GM}{r} 4\pi\rho r^2\, dr = -\int_0^R \frac{GM\rho}{r^2} 4\pi r^3\, dr$$

$$= \int_0^R \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr = -3 \times \int_0^R \frac{P}{\rho} 4\pi\rho r^2\, dr$$

$$= -3 \int_0^R \frac{P}{\rho}\frac{dM}{dr} dr = 3 \int_0^R M \frac{d}{dr}\left(\frac{P}{\rho}\right)\, dr$$

$$= 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\int_0^R \frac{M}{\rho}\frac{dP}{dr} dr = -3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\int_0^R M\left(\frac{GM}{r^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\int_0^R GM^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) dr$$

$$EP = 3\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left[\left(\frac{GM^2}{R}\right) - 2\underbrace{\int \frac{GM}{r} dM}_{EP}\right]$$

Donc,

$$EP = -\left[\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6}\right]\frac{GM^2}{R}$$

LA SOURCE D'ÉNERGIE STELLAIRE

Au 19ème siècle, avant la découverte de l'énergie nucléaire, il n'y avait qu'une source d'énergie disponible pour les étoiles: l'énergie gravitationnelle. C'etait l'idée de Kelvin et Helmholtz. Quand le théorème du viriel est appliqué au soleil, on trouve

$$E_{tot} = \frac{1}{2}EP \sim -\frac{GM_{\odot}{}^2}{R\odot} \sim 4 \times 10^{41}\ J$$

La luminosité solaire est $L_{\odot} = 3.83 \times 10^{26}$ J s^{-1}. Alors, la durée de vie du soleil serait donnée par

$$\frac{E_{tot}}{L_{\odot}} \sim 10^{15}\ \mathrm{s} \sim 3 \times 10^{7}\ \mathrm{ans}$$

si sa source etait gravitationnelle!

À cette époque, au milieu du 19ème siècle, ce résultat était acceptable: il n'existait aucune preuve convaincant que la terre etait plus âgée que 3×10^7 a. Tout ça a changé, cependant, quand les découvertes géologiques (taux de sédimentation) et biologiques (théorie d'évolution) ont indiqué un âge supérieure à 10^8 ans. Puis, avec la découverte de la radioactivité par Becquerel à la fin du siècle, une nouvelle classe d'énergie est apparue: l'énergie nucléaire.

Le processus fondamental qui libère de l'énergie dans les étoiles est la conversion de H en He:

$$4\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{He} + 4 \times 0.007 m_p c^2,$$

ou $7 \times 10^{-3} c^2$ J/kg. $7 \times 10^{-3} \times (0.1) M_\odot c^2 / L_\odot = 10^{10}$ ans. ($0.1 M_\odot$ est la masse du coeur, où se produisent les réactions nucléaires.)