INTRODUCTION à L'ASTROPHYSIQUE

Cours d'option de Licence Magistere Interuniversitaire de Physique.

Steven Balbus

2eme cours: Le Transfert du Rayonnement

RAPPELS SUR LE RAYONNEMENT

Relations d'Einstein:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21}/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3$$

Densité d'énergie d'un corps noir:

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad U = aT^4$$

Équation de Transfert de Rayonnement:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

À l'Équilibre Thermique:

$$I_\nu = B_\nu = \frac{cU_\nu}{4\pi} = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$$

Équilibre Thermique Exact: U_ν est celle d'un corps noir, $j_\nu/\kappa_\nu = B_\nu$.

Équilibre Thermique Local: U_ν n'est pas celle d'un corps noir, néanmoins $j_\nu/\kappa_\nu = B_\nu$.

RAPPELS DE MÉCANIQUE STATISTIQUE À L'ÉQUILIBRE THERMIQUE

La probabilité d'être dans un état d'énergie E:

$$P(E) = C \exp(-E/kT), \qquad 1/C = \sum_E e^{-E/kT}$$

La formule de Boltzmann qui en découle:

$$\frac{n_B}{n_A} = \frac{g_B}{g_A} \exp[-(E_B - E_A)/kT]$$

La formule de Maxwell-Boltzmann pour un gaz de particules: la densité de particules ayant une vitesse entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{dv}$ est donnée par

$$n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT)\, d^3v$$

TRANSFERT de RAYONNEMENT À l'ETL

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu = j_\nu \left(1 - \frac{I_\nu}{B_\nu}\right)$$

Considerons le cas simple où rien ne dépend de la position s. Un "diagramme de pente" indique que toutes les solutions convergent vers B_ν pour $s \to \infty$. La solution analytique est obtenue facilement

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) \exp(-\kappa_\nu s) + B_\nu[1 - \exp(-\kappa_\nu s)]$$

Cela démontre que la matière à la témperature T absorbe le rayonnement qui est incident à sa surface, et le remplace par un corps noir. Quand $I_\nu(0) = 0$ et $\kappa_\nu s \ll 1$,

$$I_\nu(s) = j_\nu s,$$

l'intégrale directe de l'émissivité.

UN EXEMPLE PARTICULIER: BREMSSTRAHLUNG THERMIQUE

$$j_\nu = 5.44 \times 10^{-52} \frac{Z^2 n_e n_i}{T^{1/2}} \exp[-h\nu/kT]$$

l'émissivité d'un plasma ionisé. (Unités: J m^{-3} Hz^{-1} ster^{-1}.) L'opacité est donnée directement par

$$\kappa_\nu = j_\nu / B_\nu.$$

Aux basses fréquences (e.g. les ondes radio) où $h\nu/kT \ll 1$,

$$\kappa_\nu = 1.731 \times 10^{-11} \frac{Z^2 n_e n_i}{\nu^2 T^{3/2}} \quad \text{m}^{-1}$$

LE CONCEPT DE LA PROFONDEUR OPTIQUE

$\kappa_\nu s = 1$ quand? Le gaz ionisé autour d'une étoile chaude a typiquement $n \sim 10^7$ m^{-3}, et $T = 10^4$K, $r \sim 10^{17}$ m. Alors,

$$s(\text{crit}) = 1/\kappa_\nu = 578\nu^2 \text{ m}$$

Pour $\nu = 10^9$ Hz (la raie à 21 cm), $s \sim 10^{21}$m, qui est assez grande, même en l'astrophysiqe. Mais quand $\nu \sim 10^7$ Hz ($\lambda = 30$m), $s = 5.78 \times 10^{16}$ m, qui est une longeur intéressante. Le gaz devient auto-absorbé, et on dit que "la profondeur optique" augmente.

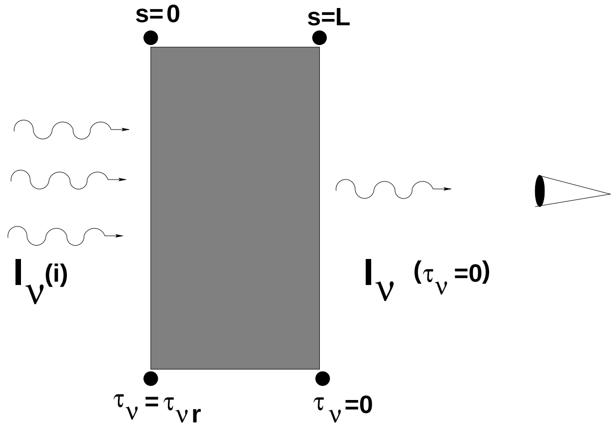
L'EQUATION DE TRANSFERT: LA SOLUTION GÉNERALE

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

Définissons $d\tau_\nu = -\kappa_\nu ds$. Remarquez le signe moins! Alors, l'équation devient

$$\frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu - S_\nu$$

où $S_\nu = j_\nu/\kappa_\nu$ est appelée la fonction source. $\tau_\nu = -\int \kappa_\nu ds$ augmente dans le gaz avec la distance mesurée depuis l'observateur. Remarquez que l'opacité n'apparaît pas explicitement; elle est cachée dans τ_ν.



$$\frac{d}{d\tau_\nu}(I_\nu e^{-\tau_\nu}) = -e^{-\tau_\nu} S_\nu$$

$$I_\nu e^{-\tau_\nu} = C - \int_{\tau_{\nu r}}^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'_\nu}\, d\tau'_\nu$$

où C est une constante d'intégration. La condition à la limite est:

$$I_\nu(s=0) = I_\nu(\tau_\nu = \tau_{\nu r}) = I_\nu(i)$$

une constante donnée qui correspond à l'intensité incidente. Si on prend $\tau_\nu = \tau_{\nu r}$, on trouve

$$I_\nu(i) e^{-\tau_{\nu r}} = C$$

Finalement, lorsque $\tau_\nu = 0$,

$$I_\nu = I_\nu(i)\,\mathrm{exp}(-\tau_{\nu r}) + \int_0^{\tau_{\nu r}} S_\nu e^{-\tau'_\nu}\, d\tau'_\nu$$

LA FORME D'UNE RAIE DE RAYONNEMENT: UN MODÈLE CLASSIQUE

Classiquement, seul un oscillateur peut émettre à une fréquence dominante. Pour voir la dépendance exacte en fréquence , considérons un électron attaché à un ressort:

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{-q}{m} E e^{i\omega t}$$

$\gamma \ll \omega$ est le taux d'amortissement (à cause du rayonnement lui-même). La solution est la partie réelle de

$$x = \frac{-qEe^{i\omega t}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

et l'accélération est la partie réelle de

$$a = \frac{\omega^2 qEe^{i\omega t}/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

La puisance émise par un électron qui accélère est donnée par la formule de Larmor:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad \text{(en moyenne)}$$

Mais,

$$a^2 = (\dot{v})^2 = \frac{d}{dt}(v\dot{v}) - v\ddot{v}$$

Pour le mouvement harmonique, le premier terme, une dérivée exacte, est 0 (en m.) Donc,

$$P = -\frac{q^2 \ddot{v}}{6\pi\epsilon_0 c^3}\, v \quad \text{(en moyenne)}$$

La force de résistance, à cause du rayonnement, est

$$F_r = \frac{P}{v} = -\frac{q^2 \ddot{v}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \underbrace{\frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}}_{m\gamma}\, v \equiv m\gamma v$$

Puisque

$$Z \equiv \text{Re }(a+ib)e^{i\omega t} = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\omega t+\phi)$$

et $\langle Z^2\rangle = |Z^2|/2$, la puissance devient

$$P = \frac{q^4 E^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\left[\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right]$$

La dépendance de la fréquence est donnée par

$$\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

On rappelle: $\gamma \ll \omega, \omega_0$. Exemple: atome d'H, $\gamma \sim 10^8$ s^{-1}, tandis que $\omega \sim 10^{16}$ s^{-1}.

LES LIMITES ASYMPTOTIQUES

$\omega \ll \omega_0$: diffusion de Rayleigh.

$$P = \frac{q^4 E^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

Très sensible à la fréquence, ω^4. C'est pourquoi le ciel est bleu (la lumière bleue diffuse plus efficacement), et le coucher de soleil est rouge (la lumière bleue diffuse hors de la ligne de visée). Pour les grains de poussière, $P \propto \omega^4$ quand $\lambda \gg r$. Quand la pollution atmosphérique est importante, les couchers de soleil sont très beaux!

$\omega \gg \omega_0$: diffusion de Thompson (ou diffusion par un électron).

$$P = \frac{q^4 E^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3}$$

indépendant de ω, comme si l'électron était libre. Le rapport de la puissance émise au flux incident (donné par $\epsilon_0 c E^2/2$) est appelé la *section efficace.* C'est vraiment la surface efficace (par électron) disponible pour diffuser le rayonnement. La formule est donnée par

$$\sigma_T = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_{clas}^2$$

où r_{clas} est le rayon classique de l'électron, $q^2/4\pi\epsilon_0 r_{clas} = mc^2$. Ce processus ne change ni l'énergie du rayonnement (le photon), ni l'énergie de l'électron. La formule ci-dessus est bien connue, c'est la section efficace de Thompson. Le rayonnement est aussi polarisé (Rayleigh ainsi que Thompson).

À NOTER ...

Notre formule (non-relativiste) pour γ n'est valable que si l'énergie du rayonnement est très inférieure à l'énergie au repos de l'électron,

$$\omega \ll mc^2/\hbar = 7.8 \times 10^{21}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

En revanche, la fréquence à laquelle $\gamma = \omega$ (rappelez-vous que $\gamma \propto \omega^2$) serait

$$\omega = \frac{6\pi\epsilon_0 \hbar c}{q^2}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) = 1.6 \times 10^{23}\ \mathrm{s}^{-1}$$

(C'est $\sim$ le [temps]$^{-1}$ pour qu'un photon traverse le rayon classique d'un électron.)

Donc, en ce qui nous concerne, γ est toujours très inférieur à ω, même dans la limite formelle $\omega \gg \omega_0$. Finalement, γ n'est jamais important sauf quand $\omega \simeq \omega_0$.

$\omega \simeq \omega_0$: diffusion résonante. Ceci caractérise le rayonnement de raie. Quand ω est très proche de ω_0, l'énergie est très efficacement absorbée. La dépendance de la fréquence est proportionnelle à

$$\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

quand $\omega \to \omega_0$. (Un exercice pour l'étudiant.) C'est la même dépendance pour j_ν et la section efficace σ. En géneral, $\kappa_\nu \propto \sigma$ (l'opacité est le nombre de sections efficaces par u.d.v.) Donc, la dépendance en fréquence est la même pour j_ν et κ_ν. Le profil de fréquence qui correspond à la formule ci-dessus est parfois appelé "Lorentzien."

j_ν/κ_ν: FORMULE GÉNERALE POUR LE RAYONNEMENT DE RAIE

Le profil Lorentzien est en effet une fonction δ de Dirac, énorme à $\omega = \omega_0$, et pratiquement zero ailleurs, puisque $\gamma \ll \omega_0$. Cela ne change pas quand la raie est élargie par les mouvements thermiques. Alors,

$$\int \kappa_\nu I_\nu \, d\nu = I_\nu(\nu_0) \int \kappa_\nu \, d\nu$$

Puisque $\jmath_\nu$ et κ_ν ont la même dépendance en ν,

$$\frac{\int j_\nu \, d\nu}{\int \kappa_\nu \, d\nu} = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$$

Donc, il est possible de d'établir une formule très génerale pour j_ν/κ_ν, la fonction source.

SYSTÈME À DEUX NIVEAUX

$$j \equiv \int j_\nu \, d\nu = n_2 \, A_{21} \, \frac{h\nu_0}{4\pi}$$

$$\kappa I_\nu(\nu_0) \equiv I_\nu \int \kappa_\nu \, d\nu = h\nu_0 (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \frac{U_\nu}{4\pi}$$

Puisque $cU_\nu/4\pi = I_\nu$

$$\frac{j}{\kappa} = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{c}{4\pi} \, \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}$$

qui donne, grâce aux formules d'Einstein,

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{2h\nu^3/c^2}{(b_1/b_2)\,\mathrm{exp}(h\nu/kT) - 1}$$

où b_i est défini par $b_i = n_i/n_i^*$, la densité d'état i comparé à sa valeur à l'équilibre thermique, marquée d'un *. "0" en indice n'est plus ecrit.

LES COLLISIONS

Le rayonnement n'est pas le seul processus qui peut conduire un système à l'ET. Les collisions entre les particules peut faire exactement la même chose.

Encore une fois, on considère un système à deux niveaux. Le taux auquel les collisions forcent les excitations de 1 à 2 doit être égal au taux auquel les collisions forcent les dèsexcitations:

$$n_e n_1 \gamma_{12} = n_e n_2 \gamma_{21}$$

où n_e est la densité d'electrons (ou les particules quelconques qui produisent les collisions), et les γ sont les coefficients de taux de collisions (unités: m^3 s^{-1}.) À l'ET,

$$\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{21}} = \frac{n_2^*}{n_1^*} = \frac{g_1}{g_2} \exp[-(E_2 - E_1)/kT]$$

LES γ: DE QUOI DÉPENDENT-ILS?

Les γ dépendent du fait que les électrons sont à l'ET, mais pas de l'état des atomes. Physiquement, ils sont proportionnels à la section efficace collisionnelle fois la vitesse thermique d'un électron. La valeur de γ_{21} est typiquement $\sim 10^{-8}/T^{1/2}$ m^3 s^{-1}. (γ_{12} peut être très inferieur, à cause du coefficient $\exp(-\Delta E/kT.)$

Pour les systèmes astrophysiques, une quantité clé est le rapport $A_{21}/n_e\gamma 21$, qui mesure l'importance du rayonnement comparé aux collisions ...

SYSTÈME À DEUX NIVEAUX: ENCORE!

$$n_2 A_{21} + n_e n_2 \gamma_{21} = n_e n_1 \gamma_{12}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_e \gamma_{12}}{A_{21} + n_e \gamma_{21}} = \frac{\gamma_{12}/\gamma_{21}}{1 + A_{21}/n_e \gamma_{21}}$$

Mais,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{b_2}{b_1}\frac{n_2^*}{n_1^*} = \frac{b_2}{b_1}\frac{g_2}{g_1}\ \mathrm{exp}(-h\nu/kT)$$

et

$$\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{21}} = \frac{g_2}{g_1}\ \mathrm{exp}(-h\nu/kT)$$

alors,

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{1 + (A_{21}/n_e \gamma_{21})}$$

un résultat très simple.

LA DENSITÉ CRITIQUE

$n_e = A_{21}/\gamma_{21}$ est appelé la densité critique, n_{crit}. Quand $n_e > n_{crit}$, et les collisions inhibent les transitions radiatives. Quand $n_e < n_{crit}$, $b_2/b_1 = n_e\gamma_{21}/A_{21} \ll 1$, parce que chaque transition excitée par une collision est immédiatement désexcitée par une transition radiative spontanée.

Pour les transitions interdites, A_{21} varie de $\sim 10^{-5}$ à ~ 1 par seconde. Alors, pour un gaz à 10^4 K, n_{crit} varie de 10^4 à 10^9 m^{-3}. En utilisante plusieurs raies, il est souvent possible de déterminer assez bien la densité électronique.

EXEMPLE. Une région spherique, rayon R, émet du rayonnement d'un atome à deux niveaux, $\tau_\nu \ll 1$. Quelle est la densité n des atomes? On suppose que $g_2 = g_1 = 1$.

$$I = jR = \frac{n_2 A_{21} h\nu R}{4\pi}, \; n = n_1 + n_2$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n - n_2} = \frac{b_2}{b_1}\frac{n_2^*}{n_1^*} = \frac{e^{-h\nu/kT}}{1 + (A_{21}/n_e\gamma_{21})}$$

On trouve

$$n_2 A_{21} = \frac{nA_{21}}{1 + e^{h\nu/kT}[1 + (A_{21}/n_e\gamma_{21})]}$$

Donc,

$$n = \frac{4\pi I}{A_{21} R h\nu}\left(1 + e^{h\nu/kT}[1 + (A_{21}/n_e\gamma_{21})]\right)$$