INTRODUCTION à L'ASTROPHYSIQUE

Cours d'option de Licence Magistere Interuniversitaire de Physique.

Steven Balbus

I. L'Interaction Matière–Rayonnement

LA FORMULE DE BOLTZMANN

L'un des concepts les plus fondamentaux qui est nécessaire pour notre étude des gaz astrophysiques est la notion d'équilibre thermique (ET). Pour un gaz de particules dans un état d'équilibre thermique, le nombre d'atomes dans un état B comparé au nombre dans l'état A est donné par la formule de Boltzmann:

$$\frac{n_B}{n_A} = \frac{g_B}{g_A} \exp[-(E_B - E_A)/kT]$$

où g_B est le nombre d'états d'énergie E_B, etc. (appelé *poids statistiques*), et k est la constante de Boltzmann

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

D'où vient ce résultat?

LE SYSTEME À DEUX NIVEAUX

On considère un système à deux niveaux en ET. Il est en contact avec un milieu (thermostat) de température T. On n'échange que l'énergie entre le système et le milieu.

La probabilité de trouver le système dans un état A doit être une fonction de E_A seulement, la quantité interne qui caractérise les états du système et qui est aussi affectée par l'échange d'énergie avec le thermostat.

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{f(E_B)}{f(E_A)} \equiv F(E_A, E_B)$$

LA QUANTITE β

Une constante additive à l'énergie ne signifie rien pour le rapport (e.g. la constante arbitraire du potentiel), donc

$$\frac{f(E_B)}{f(E_A)} = F(E_B - E_A), \qquad \text{donc } F(0) = 1.$$

Soit $\epsilon \ll E_A$. On considère le cas $E_B = E_A + \epsilon$. Alors, une série de Taylor donne

$$\frac{f(E_A + \epsilon)}{f(E_A)} = 1 + \epsilon \frac{f'(E_A)}{f(E_A)} = F(\epsilon) = 1 + \epsilon F'(0)$$

plus des termes d'ordre supérieur. Donc,

$$f'/f = F'(0) \equiv -\beta \rightarrow f(E) = Ce^{-\beta E}$$

β doit être une constante du milieu, qui est caracterisé par une seul propriété: la température T. Alors, β, que répresent-t-il?

L'ÉQUATION D'ÉTAT D'UN GAZ IDÉAL

Faisons appel aux résultats expérimentaux.

On sait que la pression d'un gaz idéal est donné par $\boldsymbol{NRT}$, où N est le nombre de moles du gaz par u.d.v., R est la constante du gaz moléculaire, et T est la température. Mais c'est pareil que nkT, où n est la densité de particules, et k la constante de Boltzmann ($n = N \times A$, $k = R/A$, $A = 6.02 \times 10^{23}$).

On peut aussi calculer directement la pression grâce à notre formule, $P(E) = C \exp(-\beta E)$. Le nombre de particules par unité de volume d'un gaz idéal ayant une vitesse entre v_z et $v_z + dv$ est donné par

$$n \times (\beta m/2\pi)^{1/2} \times \exp(-\beta m v_z^2/2)\, dv_z$$

après avoir fixé la constante de normalisation C ($\int \ldots dv_z = 1$).

LA PRESSION SUIVANT LA MÉCHANIQUE STATISTIQUE

La pression est donnée par l'intégrale

$$P = (\beta m/2\pi)^{1/2} \int_0^\infty [2mv_z]\,[nv_z\, e^{-\beta m v_z^2/2}\, dv_z]$$

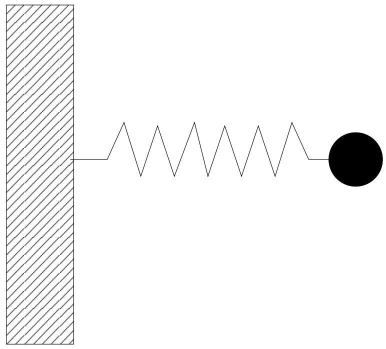
qui est le taux (par u.d.s. par u.d.t.) auquel les particules transmettent leur impulsion contre un mur. $2mv_z$ est la quantité de mouvement qui est echangée par chaque particule, et

$$nv_z\, (\beta m/2\pi)^{1/2}\, e^{-\beta m v_z^2/2}\, dv_z$$

est le taux (par u.d.s. par u.d.t.) auquel les particules ayant une vitesse entre v_z et $v_z + dv_z$ frappent le mur. L'intégrale n'est pas difficile ($\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}/2$), et le résultat est

$$P = n/\beta = nkT \quad \rightarrow \quad \beta = 1/kT.$$

Cela démontre la formule de Boltzmann.



L'ÉQUILIBRE THERMIQUE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE 1D

Énergie cinétique $mv^2/2$.
Énergie potentielle $kx^2/2$.

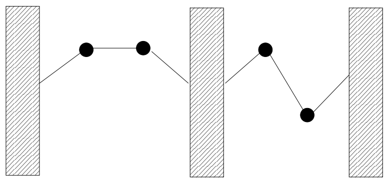
L'énergie cinétique moyenne est ($E = mv^2/2$)

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} E \exp(-E/kT)\, dv}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-E/kT)\, dv} = \frac{kT}{2}$$

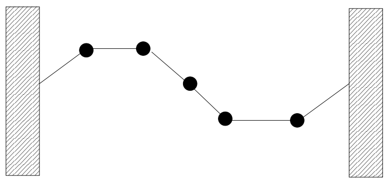
Pour l'énergie potentielle moyenne, $E = kx^2/2$, $v \leftrightarrow x$ conduit au même résultat.

Donc, l'énergie totale moyenne pour un oscillateur harmonique est $\boldsymbol{kT}$.

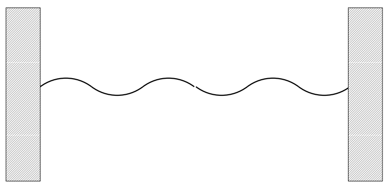
E.T. D'UN MODE OSCILLATOIRE



2 masses, 2 modes. énergie/mode $= kT$.



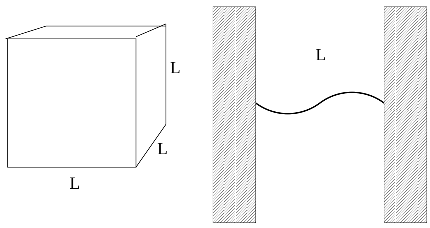
N masses, N modes. énergie/mode $= kT$.



La limite $N \to \infty$: énergie/mode $= kT$. Vrai en genéral, pour les ondes sur une corde, et les ondes électromagnétiques.

E.T. DES ONDES DANS UNE BOÎTE: LE RAYONNEMENT D'UN CORPS NOIR

Considérons le nombre de modes qui existent dans une boîte de côté L.



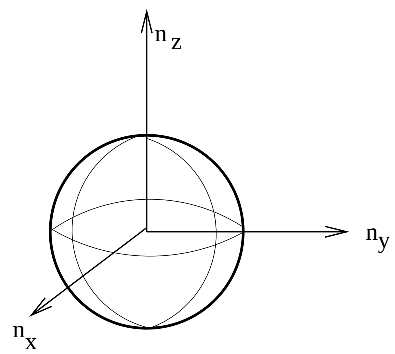
Les ondes doivent s'annuler sur les murs, donc

$$\text{ampl.} \propto \sin(n_x \pi x/L)\,\sin(n_y \pi y/L)\,\sin(n_z \pi z/L)$$

Soit N le nombre de modes avec un nombre d'onde inférieur à k. Alors,

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

$$\text{"rayon" } \mathrm{R} = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{k^2 L^2}{\pi^2}$$



$N = 4\pi R^3/3$?, le nombre de points à l'intérieur d'une sphère de rayon R? Non!

$$N = \frac{1}{8} \times 2 \times \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{k^3 L^3}{3\pi^2}$$

LA DENSITÉ D'ÉNERGIE D'UN CORPS NOIR

Entre k et $k + dk$:

$$dN = \frac{k^2 L^3}{\pi^2} dk.$$

En fonction de la fréquence $\nu = kc/2\pi$ ($c =$ la vitesse de lumière), le nombre de modes par unité de volume $V = L^3$ est

$$\frac{dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, d\nu$$

Chaque mode a l'énergie kT à l'ET, donc la densité d'énergie du rayonnement est donnée par

$$U_\nu\, d\nu = kT\ \frac{8\pi}{c^3}\nu^2\, d\nu$$

C'est la formule Rayleigh-Jeans, un résultat classique.

MAIS AUSSI UNE CATASTROPHE.

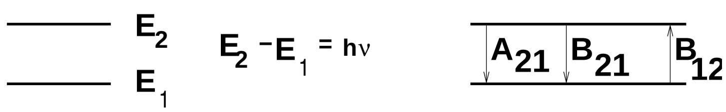
$$\int_0^\infty U_\nu \, d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \, d\nu = \infty$$

Le problème est aux hautes fréquences, une catastrophe ultra-violette, et le problème est profond.

LA SOLUTION

La première solution et celle de Max Planck (1900), mais la méthode d'Einstein (1918) est plus simple et plus physique.

On suppose qu'un atome est dans un état d'ET. Considérons deux niveaux, 1 et 2:



La différence d'énergie est égale à $h\nu$. Un électron peut faire une transition de 1 à 2 ou de 2 à 1. À l'ET, les taux doivent être les memes. Un photon est toujours émis ($2 \rightarrow 1$) ou absorbé ($1 \rightarrow 2$).

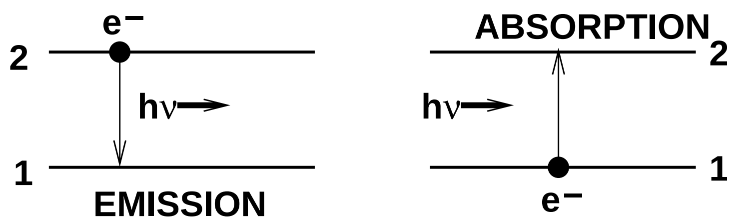
LES COEFFICIENTS A et B

Du niveau 2, un électron peut faire une transition spontanée ou elle peut être induite.

$A_{21} \equiv$ le taux d'émission spontanée (s^{-1}).

$B_{21}U_\nu \equiv$ le taux d'émission induite.

$B_{12}U_\nu \equiv$ le taux d'absorption (induite).



Remarquez qu'il faut écrire U_ν explicitement pour les transitions induites. Remarquez aussi que A et B ne dépendent pas de l'état du gaz, juste de l'état de l'atome! En revanche, la valeur d'U_ν peut bien dépendre de l'état du gaz. Les formules sont tres génerales, à l'ET ou non. ($A_{21} \sim 10^8$ s^{-1} pour une transition permise, mais $A_{21} \sim 10^{-15}$ s^{-1} pour la raie à 21 cm.)

LA FORMULE DU CORPS NOIR

L'état de l'équilibre thermique est particulier. Dans ce cas, le rayonnement force le taux d'excitation à être egal au taux de déséxcitation.

$$n_1 \, B_{12} U_\nu = n_2 \, (A_{21} + B_{21} U_\nu)$$

où n_1 et n_2 sont les densités des atomes dans les état 1 et 2, respectivement.

U_ν quelconque ne peut pas satisfaire a cette équation, il faut avoir:

$$U_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}$$

Étrange, non?

À l'ET, la formule de Mr. Boltzmann donne:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu/kT)$$

alors,

$$U_\nu = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1/g_2)(B_{12}/B_{21}) \exp(h\nu/kT) - 1}$$

La limite classique correspond à la limite des basses fréquences, c'est-à-dire $h\nu/kT \rightarrow 0$. Dans ce cas, on trouve

$$\frac{1}{U_\nu} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 kT} = \frac{B_{21}}{A_{21}} \left[\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} - 1 + \frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} \left(\frac{h\nu}{kT} \right) \right]$$

d'où

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21}/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3,$$

les relations d'Einstein. Et bien sûr ...

LA FORMULE DU CORPS NOIR

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/kT) - 1},$$

un des résultats les plus importants de toute la physique, historiquement ainsi que dans la pratique.

$U_\nu(max)$, pour $h\nu/kT = 2.82$, $\int U_\nu d\nu = aT^4$

$a = 7.56 \times 10^{-16}$ J m^{-3} K^{-4}. (Travaux dirigés.)

De plus, les relations d'Einstein

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21}/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3,$$

sont complètement générales, et elles régissent toutes les transitions atomiques. Elles sont profondes, et découlent de la symétrie de l'inversion du temps. Remarquez que si on ne connaît qu'une des quantités A_{21}, B_{21}, B_{12}, en fait on les connaît toutes les trois.

L'INTENSITÉ SPECIFIQUE DU RAYONNEMENT

On considère un mileu astrophysique (rayonnement et matière). Soit dE_ν la quantité du rayonnement qui est émise par u.d.(temps, fréquence, surface, angle-solide). L'intensité specifique I_ν est définie par

$$dE_\nu = I_\nu \, dt \, d\nu \, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{dA} \, d\Omega$$

C'est la quantité fondamentale pour décrire l'interaction entre la matière et le rayonnement, *la brillance de surface.*

$$I_\nu = \frac{\text{Flux}}{\text{steradian}}, \quad \text{Flux}, \, \Omega \propto 1/r^2$$

alors, sans source, I_ν est une constante.

L'INTENSITÉ SPÉCIFIQUE DU CORPS NOIR (ÉQUILIBRE THERMIQUE)

Le rayonnement à l'ET est isotrope, donc le flux d'énergie émis dans toutes les directions est donné par cU_ν, et l'intensité spécifique à l'équilibre thermique est

$$I_\nu \equiv B_\nu = \frac{cU_\nu}{4\pi} = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

L'ÉQUATION DE TRANSFERT DE RAYONNEMENT

Commençons notre étude du transfert de rayonnement. On a besoin de deux quantités supplémentaire. L'emissivité

$$j_\nu, \quad \text{unites :} \ \left[\frac{\mathsf{J}}{\mathsf{sec} - \mathsf{m}^3 - \mathsf{ster} - \mathsf{Hz}}\right]$$

et l'opacité

$$\kappa_\nu \quad \text{unites :} \ \left[\frac{1}{\mathsf{m}}\right]$$

L'énergie absorbée est $\kappa_\nu I_\nu$. j_ν et κ_ν dèpendent de l'état de la matière.

L'équation de transfert de rayonnement est donc

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \kappa_\nu I_\nu$$

où ds est pris le long de la direction du rayon.

ÉQUILIBRE THERMIQUE

À l'équilibre thermique, $I_\nu = B_\nu$, et $dI_\nu/ds = 0$, d'où

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu.$$

C'est vrai à l'ET lorsque $I_\nu = B_\nu$, mais si les collisions atomiques ou électroniques conduisent à l'état d'équilibre thermique dans la matière (donné par la formule de Boltzmann), il n'y a aucune différence pour le rapport j_ν/κ_ν...meme si I_ν n'est pas égale à B_ν!

Quand $I_\nu = B_\nu$, $j_\nu/\kappa_\nu = B_\nu$ on parle *d'équilibre thermique exact* (ETE). Quand $j_\nu/\kappa_\nu = B_\nu$, mais $I_\nu \neq B_\nu$, on parle *d'équilibre thermique local* (ETL).